

CÉDRIC VILLANI

TEOREMA VIE



book

HUMANITAS

TEOREMA VIE

Cédric Villani s-a născut în 1973 la Brive-la-Gaillarde, un orașel din sud-estul Franței, într-o familie de profesori de literatură. Pasionat de matematică din copilărie, studiază la Școala Normală Superioară din Paris, specializându-se în analiză matematică. În 1998 își susține teza de doctorat „Contribuții la studiul matematic al gazelor și plasmelor“, care anunță preocuparea sa pentru matematicile aplicate. În 2000 devine profesor la Școala Normală Superioară din Lyon, iar în 2009 este numit director al Institutului Henri Poincaré.

Pentru contribuțiile sale în domeniul ecuațiilor diferențiale cu derivate parțiale din fizica statistică, Cédric Villani a primit Premiul Societății Europene de Matematică (2008), Premiul Fermat (2009), Premiul Henri Poincaré (2009), Medalia Fields (2010).

CÉDRIC VILLANI

TEOREMA VIE

Ilustrații de
CLAUDE GONDARD

Traducere din franceză și cuvânt înainte de
LIVIU ORNEA

 HUMANITAS
BUCUREȘTI

Redactor: Vlad Zografi
Coperta: Ioana Nedelcu
Tehnoredactor: Manuela Măxineanu
Corector: Iuliana Glăvan
DTP: Andreea Dobreci, Dan Dulgheru

Cédric Villani

Théorème vivant

© Éditions Grasset & Fasquelle, 2012

Portretul Catherinei Ribeiro: © APIS

„La marin et la rose“, versuri de Jean-Marie William Huard,
muzică de Claude Pingault: © Les Éditions Transatlantiques

Extras din „Fragile Things“ de Neil Gaiman,
HarperCollins and Headline Review, 2006

Pe copertă: Cédric Villani

© Hervé Thouroude

© HUMANITAS, 2014 (ediția print)

© HUMANITAS, 2014 (ediția digitală)

ISBN 978-973-50-4528-9 (pdf)

EDITURA HUMANITAS

Piața Presei Libere 1, 013701 București, România

tel. 021/408 83 50, fax 021/408 83 51

www.humanitas.ro

Comenzi online: www.libhumanitas.ro

Comenzi prin e-mail: vanzari@libhumanitas.ro

Comenzi telefonice: 0372.743.382; 0723.684.194

Cuvânt înainte

Cartea pe care tocmai ați deschis-o e una stranie. Inclasabilă. Nu e roman, deci nu trebuie citită cu exigențe literare. Nu e autobiografie, așa că strictă autenticitate nu-i cereți. Piesă de teatru de-ar fi, i s-ar spune „docudramă“. Dar e scrisă în proză, nu-i piesă de teatru (ceea ce nu înseamnă că n-ar putea fi ușor dramatizată sau transformată în scenariu de film). Atunci ce e?

E o mărturie scrisă sub forma unui jurnal, dar cu evidentă finalitate, scrisă din amintiri, deci nu e chiar un jurnal adevărat. E povestea unui an din viața unui matematician de vârf, anul dinaintea primirii Medaliei Fields (echivalentul, în matematică, al Premiului Nobel). E descrierea căutărilor care au dus, într-un final fericit, dar pe care nimeni nu-l putea bănuși de la început, la demonstrarea unei teoreme importante. Recompensa a fost cea mai prestigioasă din matematică.

De ce v-ar interesa povestea asta? Pentru că, dacă veți avea răbdarea s-o parcurgeți până la capăt, veți afla ce înseamnă să faci cercetare de nivel înalt în matematică, veți afla despre aventura uluitoare a facerii unei teoreme, plecând de la primele licăriri ale rezultatului bănușit, de la felul cum, treptat, problema se circumscrie și capătă contururi din ce în ce mai precise, trecând prin momentul în care devine limpede ce e de demonstrat, parcurgând apoi etapa, extrem de anevoioasă, a punerii la punct a tehnicii necesare, a calculelor, până la încheierea demonstrației și la verificarea ei, de către autori, întâi, apoi de către referenții unei reviste de specialitate. E un proces lung – în

cazul acesta, a durat doar un an; pentru demonstrarea Marii Teoreme a lui Fermat, Andrew Wiles a muncit mai mulți ani la rând. Un proces pe parcursul căruia bucuria și extazul înțelegerii, al pătrunderii în adâncul fenomenelor studiate alternează cu groaza de a nu fi înțeles, cu dezamăgirea produsă de un calcul greșit. Un proces pe parcursul căruia mândria de a fi biruit dificultățile urmează umilinței pe care o simți când realizezi că mintea ta nu poate da atât cât îi ceri. E, în definitiv, aventura minții umane în luptă cu ea însăși.

Dar nu e vorba numai despre muncă acerbă, consumată în solitudine. E vorba, în povestea asta, și despre relații umane, despre colaborare între oameni de știință, despre relația dintre mentor și învățăcel – teorema care e personajul principal al cărții e rodul colaborării a doi matematicieni, autorul cărții și un fost doctorand al său. Și mai e vorba despre întreg contextul în care lucrează un matematician, despre atmosfera dintr-un mare institut de cercetări, cum e Institutul de Studii Avansate de la Princeton, despre problemele administrative inerente care nu pot fi ocolite, despre congrese, conferințe – un tablou aproape complet al vieții de cercetător.

Din scrupul de autenticitate, autorul a introdus în carte fragmente din mesaje electronice schimbate cu colaboratorul său și cu alți colegi, a introdus facsimile ale unor pagini din articolele sale. Nu vă speriați dacă, nefiind familiarizați cu matematica, nu veți înțelege nimic din formulele acelea pline de simboluri necunoscute. Nu sunt importante, cartea curge, poate fi citită și fără ele: sunt doar pete de culoare și, probabil, singura ocazie să vedeți cum arată niște pagini dintr-o revistă de matematică.

Să nu vă sperie nici fragmentele în engleză. Tot pentru autenticitate le-a lăsat așa autorul – dar sunt, toate, traduse la sfârșit.

Povestea aceasta nu putea fi spusă fără ca autorul să se refere la o mulțime de nume de matematicieni și fizicieni – do-

meniul său predilect e fizica matematică – și la problemele studiate sau puse de ei. Așa că, pentru înțelegerea textului, autorul a inclus, la sfârșitul unor capitole, scrise cu caractere cursive, pagini în care explică, foarte pe înțeles, deloc tehnic, așa cum numai un savant de calibru o poate face, noțiunile de matematică și fizică trebuincioase, pagini în care povestește despre probleme celebre, unele încă nerezolvate. În plus, mai sunt mici medalioane dedicate unor figuri importante de matematicieni și fizicieni întâlnite în carte, unii contemporani, alții dispăruți de mult.

Și mai e ceva. Pe lângă povestea în sine, una exemplară pentru matematica de azi, veți descoperi un personaj – autorul însuși. Cartea aceasta vă va convinge că matematicienii nu sunt tipii aceia ciudați care nu știu altceva decât să calculeze și să mormăie ursuzi. Veți vedea că un matematician are preferințe vestimentare, gastronomice, literare, ascultă muzică (ba chiar „muzici“, de multe feluri, poate veți avea și curiozitatea să vă confrunțați preferințele, ascultând câte ceva pe youtube...), are familie, își iubește copiii și se joacă cu ei, le inventează povești, iubește oamenii și comunicarea cu ei – e un om cât se poate de viu și, chiar dacă atipic, un om normal.

Din câte știu, nu mai există o carte asemenea, cel puțin nu despre matematică. Poate va deschide un drum. E scrisă de un mare matematician care se pune pe sine în scenă, dar se privește și din afară, reflectând la meseria și la pasiunea sa, la locul și rolul matematicii în societate. Dacă nu de la vârfurile ei, atunci de la cine să aflăm ceva despre știință?

Liviu Ornea

Lumea mă întreabă adesea cum e viața unui cercetător, a unui matematician, cum e viața noastră de zi cu zi, cum ne scriem opera. Aceasta e întrebarea a căreia încercă să-i răspundă cartea de față.

Povestirea urmărește apariția unui pas înainte în matematică, din momentul în care cineva s-a hotărât să se lanseze în această aventură, până când articolul care anunță noul rezultat – noua *teoremă* – e acceptat pentru publicare într-o revistă internațională.

Între aceste două momente, căutările cercetătorilor, departe de a urma o traiectorie rectilinie, se înscriu pe un drum lung, plin de meandre, de înaintări și de reveniri – așa cum se întâmplă adesea în viață.

Cu excepția câtorva modificări ne semnificative cerute de nevoile prezentării, totul în această povestire e conform cu realitatea, cel puțin așa cum am perceput-o eu.

Câteva pasaje mai lungi în engleză sunt traduse la sfârșitul cărții.

Îi mulțumesc lui Olivier Nora pentru că a iscat acest proiect cu ocazia unei întâlniri neprevăzute; îi mulțumesc lui Claire pentru atentele lecturi succesive și pentru sugestii; îi mulțumesc lui Claude pentru frumoasele sale ilustrații; îi mulțumesc lui Ariane Fasquelle și echipei de la Grasset pentru receptivitate și pentru calitatea muncii lor editoriale; în fine,

îi mulțumesc lui Clément pentru colaborarea de neuitat, fără de care această carte n-ar fi avut obiect.

Cititorii și cititoarele sunt bine-veniți să-mi comunice întrebările și comentariile lor pe cale electronică.

Cédric Villani,
Paris, decembrie 2011

Capitolul 1

Lyon, 23 martie 2008

Duminică, ora 13; laboratorul ar fi pustiu fără cei doi matematicieni puși pe treabă. O întâlnire privată pentru o ședință de lucru calmă, în biroul pe care îl ocup de opt ani la etajul al treilea al Școlii Normale Superioare din Lyon.

Așezat într-un fotoliu confortabil, bat darabana pe biroul mare, cu degetele desfășurate ca picioarele unui păianjen, așa cum m-a antrenat pe vremuri profesorul meu de pian.

În stânga mea, pe masa de-alături, un calculator. La dreapta, un dulap cu câteva sute de cărți despre matematică și fizică. În spatele meu, aranjate cu grijă pe rafturi lungi, mii și mii de pagini de articole fotocopiate într-o epocă ancestrală în care revistele științifice nu erau încă electronice; de asemenea, reproduceri ale multor lucrări de cercetare, fotocopiate într-o perioadă în care salariul nu-mi permitea să-mi astâmpăr foamea de cărți. Mai e și un întreg metru liniar de ciorne, arhivate metodic de-a lungul anilor; și încă pe-atât – notițe scrise de mână, martorele nenumăratelor ore petrecute ascultând expuneri științifice. Pe birou, în fața mea, Gaspard, laptopul meu, botezat în onoarea lui Gaspard Monge, marele matematician revoluționar; și un teanc de foi acoperite cu simboluri matematice, mângălite în cele patru colțuri ale lumii și adunate special pentru discuția de azi.

Clément Mouhot, complicele meu, ochi sclipitori, stă cu markerul în mână lângă tabla albă enormă care ocupă întreg peretele din fața mea.

— Hai, spune, de ce m-ai chemat, ce-ai de gând? N-ai prea dat detalii în mailul tău...

— Mă las din nou pe mâna vechiului meu demon, e clar că e prea ambițios, e vorba despre regularitatea pentru Boltzmann neomogenă.

— Regularitate condițională? Adică modulo margini de regularitate minimale?

— Nu, fără condiții.

— Nici mai mult, nici mai puțin! Nu în cadru perturbativ? Crezi că suntem pregătiți?

— Da, m-am apucat din nou, am avansat destul de bine, am idei, dar m-am blocat. Am descompus dificultatea cu mai multe modele reduse, dar îmi scapă chiar și cel mai simplu. Credeam că am un argument cu principiul de maxim, dar nu, s-a prăbușit totul. Trebuie să-ți povestesc.

— Dă-i drumul, ascult.

Vorbesc mult: despre rezultatul pe care-l am în minte, despre încercările pe care le-am făcut, despre diferitele bucați pe care nu reușesc să le pun cap la cap, despre puzzle-ul logic care nu se lasă compus, despre ecuația lui Boltzmann care nu cedează.

Ecuația lui Boltzmann, cea mai frumoasă ecuație din lume, după cum i-am spus unui ziarist! M-a prins când eram mic, adică în timpul tezei, și-am studiat-o pe toate părțile. Găsești orice în ecuația lui Boltzmann: fizică statistică, săgeata timpului, mecanica fluidelor, teoria probabilităților, teoria informației, analiza Fourier... Unii spun că nimeni nu cunoaște mai bine ca mine lumea matematică generată de ecuația asta.

Pe Clément l-am inițiat în universul acesta misterios acum șapte ani, când și-a început teza sub îndrumarea mea. Clément a învățat cu lăcomie și e, cu siguranță, singurul care a citit toate lucrările mele despre ecuația lui Boltzmann; acum e un cercetător respectat, autonom, strălucit și entuziast.

Cu șapte ani în urmă îl ajutam să urce-n șa, acum am eu nevoie de el. Am căzut pe o problemă prea grea, singur n-o

dovedesc; trebuie măcar să-mi pot povesti strădaniile cuiva care are teoria la degetul mic.

— Să presupunem că apar și ciocniri razante, un model fără cut-off. Atunci ecuația se comportă ca o difuzie fracționară, degenerată, desigur, totuși o difuzie, și de îndată ce avem margini pentru densitate și temperatură, ne putem lansa într-o schemă iterativă de tip Moser, adaptată ca să țină seama de caracterul nelocal.

— Schemă Moser? Hmm... Stai, încep să notez.

— De o schemă tip Moser. Cheia e că operatorul lui Boltzmann... e drept că operatorul ăsta e bilinar, e nelocal, totuși, una peste alta, e sub formă de divergență, ceea ce face să meargă schema lui Moser. Faci o schimbare de funcție nelineară, crești puterea... De fapt, ai nevoie de ceva mai mult decât de temperatură, trebuie să controlezi matricea momentelor de ordinul 2. Dar, oricum, esențială e pozitivitatea.

— Stai, stai, ia-mă-ncet, de ce nu-i de-ajuns temperatura?

Explic pe-ndelete. Discutăm, ne contrazicem. Tabla dă pe-a-fără de simboluri matematice, Clément vrea să știe mai mult despre pozitivitate. Cum să arătăm pozitivitatea strictă fără margini de regularitate? Se poate?

— Nu-i așa de șocant, dacă stai să te gândești, ciocnirile produc margini inferioare, la fel transportul într-un domeniu învecinat, lucrurile se leagă; cele două efecte ar trebui să se potenteze reciproc, altfel se cheamă că avem ghinion. A încercat pe vremuri Berndt, dar s-a lăsat. Bun, sunt o groază care au încercat, fără succes, dar tot e plauzibil.

— Ești sigur că transportul va duce la pozitivitate fără regularitate? Totuși, fără ciocniri, transporti valoarea densității, n-are cum să devină mai pozitivă...

— Da, dar când mediezi după viteze întărești pozitivitatea... cam ca în lemele de medii cinematice, dar acolo n-ai regularitate, e pozitivitate. E drept că nimeni nu s-a prea uitat la asta așa. Asta-mi aduce aminte... uite, acum doi ani, la Princeton,

un postdoc chinez mi-a pus o întrebare cam de felul ăsta. Iei o ecuație de transport, să zicem că în tor, presupui regularitate zero, vrei să arăți că densitatea spațială devine strict pozitivă. Fără regularitate! Știa s-o facă pentru transportul liber, sau pentru ceva mai general în timp scurt, dar la timp mai lung se bloca... Am transmis și altora întrebarea lui, dar n-am primit nici un răspuns convingător.

— Stai, stai, zi-mi întâi cum faci cu nemernicul de transport liber.

Transportul liber e termenul care, în jargonul nostru, desemnează un gaz ideal în care particulele nu interacționează. Un model atât de simplificat, încât nu e deloc realist, dar se pot învăța foarte multe din el.

— Păi, cu soluția explicită ar trebui să meargă, stai un pic, să-ncercăm s-o refacem.

Ne apucăm de treabă, separat, încercăm să refacem raționamentul pe care trebuie să-l fi făcut Dong Li. Nu e un rezultat major, mai degrabă e un mic exercițiu. Dar poate că pricepând soluția acestui mic exercițiu o să ne înscriem pe drumul cel bun pentru rezolvarea marii enigme. Și-apoi, e ca un joc! După câteva minute de scris în tăcere, câștig.

— Cred c-am făcut-o.

Trec la tablă să-mi expun soluția, ca la seminar.

— Descompunem soluția conform cōpiilor torului... schimbăm variabila în fiecare bucată... iese-n față un iacobian, folosești regularitatea Lipschitz... până la urmă găsești o convergență în $1/t$ („unu pe t “). E încet, dar sună bine.

— Aha, deci n-ai regularizare... obții convergența cu media... media

Clément raționează cu voce tare la calculele mele. Dintr-odată are o revelație, e excitat și arată cu degetul spre tablă:

— Păi, atunci ar trebui să vedem dacă asta nu se poate folosi pentru efectul de damping Landau!

M-a dat gata. Trei secunde de liniște. Sentimentul vag că e ceva important.

Cer explicații, Clément e tulburat, agitat, îmi spune că demonstrația asta îi amintește o discuție avută cu trei ani în urmă cu un alt cercetător de origine chineză, Yan Guo, la Universitatea Brown, pe Coasta de Est a Statelor Unite.

— În amortizarea Landau, căutăm o relaxare pentru o ecuație reversibilă...

— Da, da, știu, dar nu intervine și interacția? Nu e un Vlasov, aici e doar transport liber!

— Poate că interacția are rolul ei, da, dar... ar trebui să fie exponențială, convergența. Crezi că $1/t$ e optimal?

— Sună bine, nu-i așa?

— Și dacă regularitatea ar fi mai puternică? N-ar fi mai bine?

— Hmmmm.

Mormăi. Amestec de neîncredere și de concentrare, de interes și de frustrare.

După câteva clipe de tăcere, priviri fixe și buze strânse, reluăm discuția... Oricât de pasionantă ar fi mitica (și mistica?) amortizare Landau, ea n-are nimic de-a face cu proiectul nostru de cercetare inițial; după câteva minute, trecem la altceva. Discuția mai continuă mult, trecem de la o noțiune matematică la alta. Luăm notițe, argumentăm, ne indignăm, învățăm, pregătim un plan de atac. Totuși, când ne despărțim, amortizarea Landau e pe lungă noastră listă de teme pentru acasă.

*

Ecuația lui Boltzmann,

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f = \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{S}^2} |v - v_*| \left[f(v') f(v'_*) - f(v) f(v_*) \right] dv_* d\sigma,$$

descoperită pe la 1870, modelează evoluția unui gaz rarefiat, format din miliarde și miliarde de particule care se izbesc una de alta; reprezentăm distribuția statistică a pozițiilor și

vitezelor acestor particule printr-o funcție $f(t,x,v)$ care la timpul t indică densitatea de particule a căror poziție e (aproximativ) x și a căror viteză e (aproximativ) v .

Ludwig Boltzmann a descoperit noțiunea statistică de entropie, sau dezordine, a unui gaz:

$$S = - \iint f \log f \, dx \, dv;$$

folosindu-și ecuația, a demonstrat că, pornind dintr-o stare inițială oarecare, entropia nu poate decât să crească în timp, niciodată să scadă. În termeni metaforici, lăsat în voia lui, gazul devine, în mod spontan, din ce în ce mai dezordonat, iar evoluția aceasta e ireversibilă.

Cu creșterea entropiei, Boltzmann regăsea o lege descoperită experimental câteva zeci de ani mai devreme și cunoscută sub numele de al doilea principiu al termodinamicii; dar îi adăuga câteva contribuții conceptuale excepționale. În primul rând, înlocuia o lege empirică, observată experimental și ridicată la rang de principiu, cu o demonstrație argumentată; apoi, introducea o interpretare matematică, extraordinar de fecundă, a misterioasei entropii; în fine, reconcilia fizica microscopică – imprevizibilă, haotică și reversibilă – cu o fizică macroscopică previzibilă, stabilă și ireversibilă. Contribuțiile acestea i-au adus lui Boltzmann un loc de cinste în panteonul fizicii teoretice, precum și atenția mereu reînnoită a filozofilor și epistemologilor.

Apoi, Boltzmann a definit starea de echilibru a unui sistem statistic ca starea de entropie maximă, fondând astfel imensul domeniu al fizicii statistice a echilibrului: cea mai naturală e starea de dezordine.

Tânărul cuceritor Boltzmann a făcut treptat loc unui bătrân măcinat care s-a sinucis în 1906. Tratatul său de teoria gazului, încă de actualitate, ne apare, din perspectiva trecerii anilor, ca una dintre cele mai importante lucrări științifice ale secolului al XIX-lea. Dar predicțiile sale, confirmate de experiențe, așteaptă încă o teorie matematică completă; una dintre piesele lipsă în acest puzzle este studiul regularității soluțiilor ecuației lui Boltzmann. În ciuda acestui mister care nu se lasă devoalat, sau poate că, în parte, datorită lui, ecuația lui Boltzmann e acum obiectul unei teorii înfloritoare care preocupă o comunitate internațională de matematicieni, fizicieni și ingineri care se adună cu sutele la colocviile Rarefied Gas Dynamics și cu multe alte ocazii.



Ludwig Boltzmann

Capitolul 2

Lyon, ultima săptămână din martie 2008

Amortizarea Landau!

După întâlnirea noastră de lucru, în minte îmi revin amintiri neclare: frânturi de conversație, discuții neduse până la capăt... Toți fizicienii specialiști în plasmă sunt familiarizați cu amortizarea Landau, dar pentru matematicieni fenomenul rămâne un mister.

În decembrie 2006, eram la Oberwolfach, într-un institut legendar pierdut în inima munților Pădurea Neagră, un loc liniștit în care matematicienii vin și pleacă într-un balet necurmat pentru a discuta cele mai diverse subiecte. Uși fără încuietore, acces liber la băuturi, mici cutii de lemn în care se lasă banii datorați, prăjituri din belșug, mese la care convivii se așază pe locuri stabilite prin tragere la sorți.

În ziua aceea, la Oberwolfach, soarta mă plasase la aceeași masă cu Robert Glassey și cu Eric Carlen, doi specialiști americani în teoria matematică a gazului. În ajun, prezentasem plin de mândrie, în deschiderea colocviului, o recoltă proaspătă de rezultate; și, în aceeași dimineață, Eric ne servise un expozeu entuziast și mustind de idei despre care continuam să discutăm în jurul supei aburinde. Toate astea, fără nici o pauză, erau un pic prea mult pentru Robert, care se simțea bătrân și depășit, și suspina: „Time to retire“...

Eric protestase: cum să ieși la pensie când n-a fost nici odată o perioadă mai captivantă pentru teoria gazului! Protestasem și eu: cum să ieși la pensie când avem atâta nevoie de

experiența acumulată de Robert în treizeci și cinci de ani de carieră!

— Robert, tell me about the mysterious Landau damping effect, can you explain, is it for real?*

*Weird, strange***, astea-s cuvintele care s-au repetat în răspunsul lui Robert. Da, Maslov lucrase la asta; da, există paradoxul reversibilității care pare incompatibil cu amortizarea Landau; nu, nu e limpede. Eric sugerase că amortizarea asta ar fi o himeră ieșită din imaginația fertilă a fizicienilor, fără speranța unei formulări matematice. Nu obținusem nici un fel de informație din conversația asta, și o arhivasem într-un ungher al creierului.

Acum suntem în 2008 și nu știu despre subiect mai mult decât în 2006. Dar Clément a avut ocazia să-l discute îndelung cu Yan Guo, „fratele“ științific mai mic al lui Robert – au avut același îndrumător de teză. Fondul problemei, spunea Yan, e că Landau n-a lucrat pe modelul original, ci pe unul simplificat, *liniarizat*. Nimeni nu știe dacă lucrările lui se



Yan Guo

* Robert, vorbește-mi despre misteriosul efect de amortizare Landau, poți să-l explici, chiar există? (în engl. în text). (*N. t.*)

** Ciudat, straniu (în engl. în text). (*N. t.*)

aplică și „adevăratului” model neliniar. Yan e fascinat de problemă – și nu-i singurul.

Oare Clément și cu mine am putea-o ataca? De ce nu? Dar, ca să rezolvăm problema, trebuie întâi să știm exact care-i întrebarea! În cercetarea matematică, identificarea cu claritate a obiectivului e un prim pas crucial și delicat.

Și oricare-ar fi acest obiectiv, singurul lucru de care suntem siguri e punctul de pornire: ecuația lui Vlasov:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f - \left(\nabla W * \int f dv \right) \cdot \nabla_v f = 0,$$

care determină, cu o excelentă precizie, proprietățile statistice ale plasmiei. Matematicianul, aidoma sărmaneii doamne de Shalott dintr-o baladă arthuriană, nu poate privi lumea direct, ci numai prin intermediul imaginii sale reflectate, în speță, matematica. Așa că trebuie să-l târâm pe Landau în lumea ideilor matematice, lume guvernată numai de logică.

Nici Clément, nici eu nu mai lucraserăm pe ecuația asta. Dar ecuațiile aparțin tuturor, așa că aveam să ne suflecăm mânecile.

*

Lev Davidovici Landau, evreu rus născut în 1908, Premiul Nobel în 1962, e unul dintre cei mai mari fizicieni ai secolului XX. Persecutat de regimul sovietic, eliberat din închisoare grație devotamentului colegilor săi, a fost și un tiran al fizicii teoretice din epoca sa, și autorul, alături de Evgheni Lifșii, al unui curs magistral care e încă de neocolit. Contribuțiile sale fundamentale sunt prezente în toate lucrările de fizica plasmiei: mai întâi, ecuația lui Landau, sora mai mică a ecuației lui Boltzmann, pe care o studiasem ani de-a rândul în timpul tezei; apoi, celebra amortizare Landau, care sugerează o stabilizare spontană a plasmiei, o întoarcere către echilibru, fără creșterea entropiei, fenomen opus mecanismelor care guvernează ecuația lui Boltzmann.

Fizica gazelor, fizica lui Boltzmann: entropia crește, informația se pierde, săgeata timpului lucrează, starea inițială se uită; treptat, distribuția statistică se apropie de starea de entropie maximă, atât de dezordonată pe cât se poate.

Fizica plasmiei, fizica lui Vlasov: entropia e constantă, informația se conservă, nu există săgeata timpului, starea inițială e mereu reținută; dezordinea nu crește și nu există nici un motiv să te apropii de ceva anume.

Dar Landau reluase studiul lui Vlasov – același Vlasov pe care-l disprețuia și despre care nu ezita să afirme că aproape toate contribuțiile lui sunt false – și sugerase că forțele electrice se atenuează spontan în timp, fără să crească entropia și fără frecare de o natură sau alta. O erezie?

Calculul matematic al lui Landau, complex și ingenios, a convins comunitatea științifică, iar acest fenomen a primit numele de amortizare Landau. Nu fără ca voci neîncrezătoare să se facă, desigur, auzite.



Lev Landau

Capitolul 3

Lyon, 2 aprilie 2008

Masa joasă instalată pe culoar e acoperită cu ciorne, iar tabla e plină de desene mici. Pe fereastra uriașă se vede un soi de păianjen gigant, negru, cubist, cu picioroange prea lungi, faimosul laborator lyonez P4, unde se fac experiențe cu virușii cei mai periculoși din lume.

Invitatul meu, Freddy Bouchet, își aranjează notele și le îndeasă în rucsac. Am stat de vorbă o oră-ntreagă despre cercetările lui, despre simulările numerice pe galaxii și despre misterioasa capacitate a stelelor de a se organiza spontan în configurații stabile.



Freddy Bouchet

Această stabilizare nu e înscrisă în legea gravitației universale descoperită de Newton acum 343 de ani. Totuși, când observăm o aglomerare de stele guvernate de această lege a

gravitației, avem în mod clar impresia că ansamblul se stabilizează după un timp suficient de mare. Se vede bine în numeroase calcule făcute pe calculatoare puternice...

Așadar, se poate *deduce* această proprietate de stabilizare din legea gravitației universale?

Astrofizicianul Linden-Bell, care credea în ea cu tărie de fier, a botezat fenomenul *relaxare violentă*. Un oximoron de toată frumusețea!

— Relaxarea violentă, Cédric, e ca amortizarea Landau. Doar că amortizarea Landau e în regim perturbativ, iar relaxarea violentă în regim puternic neliniar.

Freddy, care are dublă formație, de matematician și de fizician, și-a consacrat o parte din viață unor probleme de felul acesta. Printre chestiunile fundamentale pe care le-a studiat, despre una anume a vrut să vorbim azi mai pe-ndelete.

— Vezi, tu, Cédric, când modelăm galaxiile, e clar că înlocuim stelele, punctișoare din univers, cu un fluid, ca un gaz de stele. Trecem de la discret la continuu. Dar care e mărimea erorii comise prin această aproximare? Cum depinde ea de numărul de stele? Într-un gaz, avem un miliard de miliarde de particule, într-o galaxie doar o sută de miliarde. Oare asta schimbă mult lucrurile?

Interlocutorul meu a discutat multă vreme, a pus întrebări, a explicat rezultate, a schițat desene, a notat referințe. A fost evocată legătura dintre cercetările lui și unul dintre caii mei de bătaie, teoria transportului optimal, fondată de Monge. Schimbul de idei a fost profitabil, și Freddy e satisfăcut. Cât despre mine, sunt teribil de excitat pentru că am văzut apăărând din nou amortizarea Landau, la doar câteva zile după discuția mea cu Clément.

În timp ce Freddy își ia rămas-bun și pleacă, intervine vecinul meu de birou, care și-a văzut până acum de lucru în liniște, clasându-și hârtiile. Părul lui lung, grizonant, îi dă un simpatice aer contestatar.

— Știi, Cédric, m-am abținut să mă amestec, dar știam desenele alea de pe tablă.

Plenary speaker la ultimul Congres Internațional al Matematicienilor, membru al Academiei de Științe, prezentat adesea — și pe drept cuvânt, nu încapse îndoială — drept „cel mai bun conferențiar din lume“ în matematică, Étienne Ghys este el însuși o instituție. Provincial militant, de douăzeci de ani s-a dedicat dezvoltării laboratorului de matematică de la Școala Normală Superioară din Lyon, care, mai ales datorită contribuției sale, s-a transformat într-unul dintre cele mai bune centre de geometrie din lume. Pe cât de carismatic, pe atât de cărcotaș, Étienne are întotdeauna ceva de spus, despre orice subiect.



Étienne Ghys

— Desenele pe care le-am făcut cu Freddy le știi?

— Da, asta apare în teoria K.A.M. Iar pe celălalt l-am mai văzut...

— Ai o sursă bună?

— Păi, știi, K.A.M. intervine aproape peste tot: pleci cu un sistem dinamic complet integrabil, cvasiperiodic, perturbă un pic, apare o problemă de divizori mici care distruge unele traiectorii pe termen lung, dar rămâi cu stabilitatea în probabilitate.

— Da, da, știu, dar desenele?

— Stai, o să-ți găsesc o carte bună despre asta. Dar sunt o mulțime de desene pe care le găsești în cărți de cosmologie și cu care suntem obișnuiți din teoria sistemelor dinamice.

Foarte interesant. Am să mă documentez. O să m-ajute oare să pricep ce se ascunde în spatele stabilizării?

Asta-mi place cel mai mult în laboratorul meu, atât de mic și atât de performant, felul în care se amestecă subiectele în conversație, între cercetători cu orizonturi matematice diferite, în jurul unei cafetiere sau pe culoare, fără să le pese de barierele tematice. Atâtea piste noi de explorat!

N-am răbdare să aștept ca Étienne să găsească pentru mine o carte în uriașa lui colecție, așa că mă descurc cu ce am în biblioteca mea: un tratat al lui Alinhac și Gérard despre metoda Nash-Moser. Am mai frunzărit cartea asta acum câțiva ani și știu că metoda Nash-Moser e unul dintre pilonii teoriei Kolmogorov-Arnold-Moser, numită K.A.M., despre care vorbea Étienne. Mai știu și că în spatele lui Nash-Moser stă extraordinara schemă de aproximare a lui Newton, schema aceea care converge cu o viteză inimaginabilă, în exponențiala exponențialei, și pe care Kolmogorov a reușit s-o folosească atât de ingenios!

Sincer să fiu, nu văd nici o legătură între toate lucrurile astea frumoase și problema mea de amortizare Landau. Dar dacă e bună intuiția lui Étienne? Pauză de visare, îndes cartea în rucsacul deja greu și alerg să-mi aștept copiii la ieșirea din școală.

Cum ajung în metrou, scot din haină o Manga* și, preț de o clipă scurtă și prețioasă, lumea exterioară dispare ca să lase loc unui univers populat de chirurghi supranatural de îndemânatici, cu fețe peticite, de yakuzi neîndurători care-și dau viața pentru fetițele lor cu ochi mari de căprioară, de monștri cruzi care se preschimbă dintr-odată în eroi tragici, de băieței cu bucle blonde care se transformă treptat în monștri plini de cruzime. O lume sceptică și tandră, pasională și dezabuzată, lipsită de prejudecăți și de maniheisme, care mustește de emoție,

* Revistă de benzi desenate în stil japonez. (N. t.)

te lovește-n plex și stoarce lacrimile cititorului gata să joace jocul inocenței.

Stația Hôtel de Ville, trebuie să cobor. Pe durata călătoriei, prin minte și prin vine mi-a curs povestea, ca un mic șuvoi de hârtie și de cerneală, m-am curățat pe dinăuntru.

Astfel, toate gândurile matematice sunt puse în *stand by*. Manga și matematica nu se-amestecă. Poate mai târziu, în vis? Și dacă Landau, după groaznicul accident care l-ar fi putut costa viața, ar fi fost operat de Black Jack? E clar că acel chirurg demonic l-ar fi readus imediat la viață, iar Landau și-ar fi putut relua opera supraomenească.

Ca să vezi, nu m-am mai gândit la observația lui Étienne și la chestia aia cu teoria Kolmogorov-Arnold-Moser! Kolmogorov și Landau... care-i legătura? Îndată ce pășesc afară din metrou, misterul începe iar să-mi bântuie mintea. Dacă e vreo legătură, am s-o găsesc.

De fapt, la vremea aceea n-aveam cum să ghicesc că-mi va lua mai bine de un an până să găsesc legătura. Nici n-aveam cum să pricep ironia incredibilă: desenul care l-a făcut pe Étienne să reacționeze, care l-a făcut să se gândească la Kolmogorov, ilustra de fapt o situație în care legătura cu Kolmogorov e ruptă.

În ziua aceea, Étienne a avut o intuiție bună, al cărei punct de pornire era greșit. Ca și cum Darwin ar fi ghicit evoluția speciilor comparând lilieci cu pterodactilii și având convingerea – greșită – că există o legătură strânsă între ei.

Zece zile după cursul neașteptat luat de ședința mea de lucru cu Clément, asta-i a doua coincidență miraculoasă care-mi iese în cale.

Dar trebuie s-o exploatez.

*

„Cum îl chema pe fizicianul ăla rus? Îl adunaseră de pe jos după un accident de mașină de toată frumusețea. Din

punct de vedere medical era mort. Am citit despre cazul ăsta extraordinar. Știința sovietică și-a mobilizat toate resursele ca să salveze un cercetător de neînlocuit. Au chemat și medici străini. Au reanimat mortul. Săptămâni la rând, cei mai mari chirurghi ai lumii au vegheat la căpătâiul lui. De patru ori a murit tipul. De patru ori i-au insuflat o viață artificială, am uitat detaliile, dar îmi amintesc că lectura era pasionantă, toată lupta asta împotriva unei fatalități de neacceptat. Avea mormântul deschis, l-au smuls de acolo cu forța. Și-a reluat postul la universitatea din Moscova.”

Paul Guimard, Les Choses de la vie

*

Legea gravitației universale a lui Newton afirmă că două corpuri oarecare se atrag cu o forță proporțională cu produsul maselor lor și invers proporțională cu pătratul distanței dintre ele

$$F = \frac{G M_1 M_2}{r^2}.$$

Această lege clasică a gravitației explică bine mișcarea stelelor în galaxii. Dar chiar dacă legea lui Newton e simplă, numărul imens de stele dintr-o galaxie face teoria dificilă. La urma urmei, chiar dacă înțelegem mișcarea fiecărui atom luat separat, nu înseamnă că am înțeles cum funcționează o ființă umană...

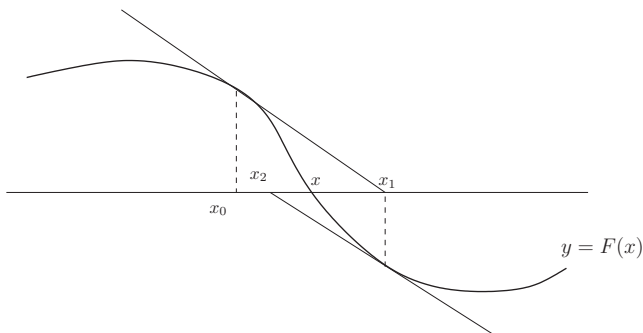
La câțiva ani după legea gravitației, Newton făcea o altă descoperire extraordinară: schema de aproximare a lui Newton, care permite calculul soluției unei ecuații oarecare

$$F(x) = 0.$$

Pornind cu o aproximare x_0 a soluției, înlocuim funcția F prin tangenta sa T_{x_0} în punctul $(x_0, F(x_0))$ – în termeni tehnici, linia-rizăm ecuația în jurul lui x_0 –, și rezolvăm ecuația aproximată

$T_{x_0}(x) = 0$. Asta furnizează o nouă aproximație x_1 a soluției, și o luăm de la capăt: înlocuim F prin tangenta sa T_{x_1} în x_1 , definim x_2 ca soluție a lui $T_{x_1}(x_2) = 0$, și așa mai departe. În notații matematice precise, relația dintre x_n și x_{n+1} este

$$x_{n+1} = x_n - [DF(x_n)]^{-1} F(x_n).$$



Aproximațiile succesive x_1, x_2, x_3, \dots astfel obținute sunt incredibil de bune: se apropie de soluția „adevărată” cu o viteză fenomenală. Adesea, ajung patru sau cinci încercări pentru a obține o precizie superioară oricărui calculator



Isaac Newton

modern. Se zice că babilonienii foloseau deja metoda asta pentru extragerea rădăcinii pătrate acum patru mii de ani; Newton a descoperit că procedeul se aplică ecuațiilor de orice fel, nu numai calculului rădăcinii pătrate.

Mult mai târziu, convergența supranatural de rapidă a schemei lui Newton a fost folosită pentru a demonstra unele dintre rezultatele cele mai importante din secolul XX: teorema de stabilitate a lui Kolmogorov, teorema de scufundare izometrică a lui Nash... În sine, schema asta diabolică transcende distincția artificială dintre matematica pură și matematica aplicată.

*

Matematicianul rus Andrei Kolmogorov e o figură legendară a istoriei științei din secolul XX. E fondatorul teoriei moderne a probabilităților, în anii '30. Teoria sa despre turbulența fluidelor, elaborată în 1941, e încă un punct de referință, fie pentru a o ataca, fie pentru a o corobora. Teoria complexității elaborată de el prefigurează dezvoltarea inteligenței artificiale.

În 1954, la Congresul Internațional al Matematicienilor, a propus un enunț stupefiant. În timp ce Poincaré își convinsese colegii, încă de acum 70 de ani, că sistemul solar prezintă o instabilitate intrinsecă – anume că o incertitudine asupra poziției planetelor, oricât de mică ar fi ea, face imposibilă orice predicție asupra poziției acestor planete în viitorul îndepărtat –, Kolmogorov susține că sistemul solar este probabil stabil – și o face combinând, cu o îndrăzneală uluitoare, probabilitățile și ecuațiile deterministe ale mecanicii. Instabilitatea e posibilă, după cum a înțeles Poincaré, doar Kolmogorov a arătat că aceasta nu apare decât rareori.

Teorema lui Kolmogorov arată că, dacă se pleacă de la un sistem mecanic exact rezolubil (sistemul solar așa cum îl imagina Kepler, cu planetele rotindu-se cuminți și pentru totdeauna în jurul Soarelui, pe orbite eliptice neschimbate), și dacă sistemul e perturbat foarte puțin (ținând cont de forțele de atracție gravitaționale între planete, pe care Kepler le neglija),

atunci sistemul astfel obținut rămâne stabil pentru majoritatea condițiilor inițiale.

Stilul eliptic al lui Kolmogorov și complexitatea argumentelor i-au făcut pe contemporani neîncredători. Cu metode diferite, rusul Vladimir Arnold și germanul Jürgen Moser au reușit să reconstituie demonstrații complete, primul pentru enunțul inițial al lui Kolmogorov, al doilea pentru o variantă mai generală. Era actul de naștere al teoriei K.A.M., care a generat câteva dintre cele mai puternice și surprinzătoare pagini ale mecanicii clasice.



Andrei Kolmogorov

Frumusețea aparte a acestei teorii a obținut adeziunea oamenilor de știință, și, timp de câteva decenii, s-a crezut într-un sistem solar stabil, deși condițiile tehnice cerute de teoria lui Kolmogorov nu sunt complet îndeplinite în realitate. A trebuit să așteptăm lucrările lui Jacques Laskar, de la sfârșitul anilor '80, pentru ca opiniile să se schimbe din nou. Dar asta e o altă poveste.

Capitolul 4

Chaillol, 15 aprilie 2008

Publicul își ține răsuflarea, profesorul dă semnalul, și toți copiii își plimbă arcușul pe corzi. După cum impune metoda Suzuki, părinții asistă la lecția colectivă. Oricum, în vila asta imensă, folosită în întregime pentru pregătirea muzicală, ce altceva să faci?

Părinții își reprimă strâmbăturile când notele scârțâie prea rău. Cei care au acceptat ieri să se facă de râs cântând la instrumentele copiilor, întru marea satisfacție a acestora din urmă, știu ce greu e să scoți un ton corect din instrumentele astea diabolice! Și-apoi, azi e chiar o atmosferă frumoasă de lucru în bună dispoziție, copiii sunt fericiți.

Cu sau fără metoda Suzuki, ce contează dincolo de orice e harul pedagogic al profesorului, iar cel care-i predă violoncelul băiatului meu e pur și simplu extraordinar.

Așezat în primele rânduri, devorez *Galactic Dynamics*, bestsellerul lui Binney & Tremaine, cu entuziasmul unui copil care descoperă o lume nouă. N-aș fi crezut că ecuația lui Vlasov e atât de importantă în astrofizică. Boltzmann rămâne cea mai frumoasă ecuație din lume, dar nici Vlasov nu-i de lepădat!

În mintea mea, nu doar ecuația lui Vlasov își sporește prestigiul, dar și stelele devin mai atrăgătoare. Galaxiile spiralate, aglomerările globulare – toate mi se păreau simpatice, da, nimic de zis... Dar acum, când am o cheie matematică pentru a le înțelege, e pur și simplu pasionant.

În timpul scurs de la ședința de lucru cu Clément, mi-am refăcut calculele, încep să am niște idei. Mormăi.

— Nu pricep, ăștia zic că amortizarea Landau e foarte diferită de amestecul fazelor... Dar mie mi se pare că e același lucru, de fapt. Hrmmrm.

Privire scurtă către drăgălașele capete blonde. Totu-i în regulă.

— Hmmm, calculul ăsta nu arată rău. Și nota asta din josul paginii, ce-o fi... Ce contează în ecuația liniarizată nu e analiza spectrală, e soluția problemei Cauchy. Păi, da. E de bun simț! Întotdeauna așa mi s-a părut. Atunci cum fac ei chestia asta... Hmmm. Transformată Fourier. Clar, analiza Fourier, de când e ea, încă nu s-a inventat ceva mai bun. Transformată Laplace, relație de dispersie...

Învăț repede, pătrund adânc, asimilez ca un copil care se împregnează cu o limbă străină.

Când se lasă noaptea, așezat turcește în mansardă, îmi schimb ideile devorând ultima culegere de nuvele a lui Neil Gaiman, *Fragile Things*, proaspătă, încă netradusă. Neil spune că avem datoria să ne spunem unul altuia povești. Are dreptate. Povestea unei improvizații geniale la contrabas. Povestea unei doamne bătrâne care-și rememorează iubirile trecute. Povestea unui phoenix care tot învie și e de fiecare dată gătit ca un fel de mâncare pentru cunoscători rafinați.

Când mă duc la culcare, mai rămân treaz o bună bucată de vreme. Imposibil să aprind lumina: toată familia doarme într-o singură cameră. Creierul meu bate câmpii. Bătrânele galaxii fragile improvizează o poveste à la Gaiman, problema matematică învie întruna pentru a fi gătită de cercetători. Stelele îmi cresc în creier. De fapt, ce teoremă vreau să demonstrez?

*

,Crawcrustle', said Jackie Newhouse, aflame, ,answer me truly. How long have you been eating the Phoenix?'

„A little over ten thousand years’, said Zebediah. „Give or take a few thousand. It’s not hard, once you master the trick of it that’s hard. But this is the best Phoenix I’ve ever prepared. Or do I mean, „This is the best I ever cooked this Phoenix“?’

*„The years!’ said Virginia Boote. „They are burning off you!’
„They do that’, admitted Zebediah. „You’ve got to get used to the heat, though, before you eat it. Otherwise you can just burn away.’*

„Why did I not remember this?’ said Augustus TwoFeathers McCoy, through the bright flames that surrounded him. „Why did I not remember that this was how my father went, and his father before him, that each of them went to Heliopolis to eat the Phoenix? And why do I only remember it now?’

„Shall we burn away to nothing?’ asked Virginia, now incandescent. „Or shall we burn back to childhood and burn back to ghosts and angels and then come forward again? It does not matter. Oh, Crusty, this is all such fun!’

*Neil Gaiman, Fragile Things**

*

Analiza Fourier constă în studiul vibrațiilor elementare ale semnalelor. Să presupunem că vrem să analizăm un semnal oarecare, o cantitate care variază pe măsură ce trece timpul: sunetul, de exemplu, e format din mici variații ale presiunii atmosferice. În loc să se uite direct la variațiile complexe ale acestui semnal, Joseph Fourier, savant și gânditor politic de la începutul secolului XIX, a avut ideea să-l descompună într-o combinație de semnale elementare, fiecare dintre ele având o variație foarte simplă și repetitivă: sinusoidale (și gemenele lor, cosinusoidale).

* Traducerea textelor care apar în engleză e dată la sfârșitul cărții, în anexă. (N. t.)



Joseph Fourier

Fiecare sinusoidă e caracterizată de amplitudinea și de frecvența variațiilor sale; în descompunerea lui Fourier, amplitudinile ne dau informații despre importanța relativă a frecvențelor corespunzătoare din semnalul studiat.

Astfel, sunetele care ne înconjoară sunt formate prin suprapunerea unei multitudini de frecvențe. Vibrația de 440 de bătăi pe secundă e un la care va fi perceput cu atât mai puternic, cu cât amplitudinea lui e mai mare. La 880 de bătăi pe secundă, vom auzi un la din octava superioară. Dacă se multiplică frecvența cu 3, se trece la cvintă, adică la mi; și așa mai departe. Dar, în practică, sunetele nu sunt niciodată pure, ele sunt întotdeauna alcătuite din suprapunerea a numeroase frecvențe care le determină timbrul; ca să-mi pregătesc teza de master, am studiat toate astea într-un curs pasionant, intitulat „Muzică și matematică“.

Iar analiza Fourier e bună la orice: la analiza sunetelor și la imprimarea lor pe CD, dar și la analiza imaginilor și la transmiterea lor prin Internet, sau la analiza variațiilor nivelului mărilor și la predicția mareelor...

Victor Hugo își bătea joc de Joseph Fourier, „micuțul“ prefect din Isère, punea pariu că gloria sa de academician și

de om politic se va ofili curând. Îl compara cu omul politic Charles Fourier, „marele Fourier“, care avea să intre în posteritate grație ideilor sale sociale.

Nu sunt sigur că Charles Fourier a gustat complimentul. Socialiștii nu aveau încredere în Hugo, care era, desigur, cel mai mare scriitor al epocii, dar avea și un solid trecut de giruetă politică, rând pe rând monarhist, bonapartist, orléanist, legitimist, înainte ca exilul să-l transforme în republican.

Cert este că – în ciuda respectului datorat scriitorului de mare talent, ale cărui opere le-am devorat în copilărie – influența lui Joseph Fourier e azi mult mai importantă decât a lui Hugo însuși; „marele său poem matematic“ (cum spunea Lord Kelvin), predat în toate țările lumii, e folosit în fiecare zi de miliarde de oameni, care nici măcar nu-și dau seama de asta.

*

Ciornă din 19 aprilie 2008

Pentru a obține formule, va trebui să luăm transformate în cele trei variabile x , v și t . Notăm

$$\hat{g}(k) = \int e^{-2i\pi x \cdot k} g(x) dx \quad (k \in \mathbb{Z}^d)$$

$$\tilde{g}(k, \eta) = \int e^{-2i\pi x \cdot k} e^{-2i\pi v \cdot \eta} g(x, v) dv dx \quad (k \in \mathbb{Z}^d, \eta \in \mathbb{R}^d).$$

În fine, notăm

$$(\mathcal{L}g)(\lambda) = \int_0^\infty e^{\lambda t} g(t) dt$$

(transformata Laplace).

Fixăm deocamdată $k \in \mathbb{Z}^d$.

Luând transformata Fourier în x a ecuației lui Vlasov găsim

$$\frac{\partial \widehat{f}}{\partial t} + 2i\pi(v \cdot k)\widehat{f} = 2i\pi(k\widehat{W}\widehat{\rho}) \cdot \nabla_v f_0(v).$$

Cu formula lui Duhamel rezultă

$$\begin{aligned} \widehat{f}(t, k, v) &= e^{-2i\pi(v \cdot k)t} \widehat{f}_i(k, v) \\ &+ \int_0^t e^{-2i\pi(v \cdot k)(t-\tau)} 2i\pi \widehat{W}(k) \widehat{\rho}(\tau, k) k \cdot \nabla_v f_0(v) dv. \end{aligned}$$

Integrând după v obținem

$$\begin{aligned} \widehat{\rho}(t, k) &= \int \widehat{f}(t, k, v) dv \\ &= \int e^{-2i\pi(v \cdot k)t} \widehat{f}_i(k, v) dv + \int_0^t 2i\pi \widehat{W}(k) \\ &\quad \times \left(\int e^{-2i\pi(v \cdot k)(t-\tau)} k \cdot \nabla_v f_0(v) dv \right) \widehat{\rho}(\tau, k) d\tau. \end{aligned}$$

(De introdus justificarea integrării după v ... dar putem presupune întotdeauna de la început că datele sunt cu suport compact în viteză, apoi să ne apropiem? sau să trunchiem...)

Primul termen din membrul drept nu e decât $\tilde{f}_i(k, kt)$ (acești artificioși deja folosit pentru omogenizarea transportului liber...)

Cu ipoteze slabe asupra lui f_0 se poate scrie, pentru orice $s \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \int e^{-2i\pi(v \cdot k)s} k \cdot \nabla f_0(v) dv &= +2i\pi|k|^2 s \int e^{-2i\pi(v \cdot k)s} f_0(v) dv \\ &= 2i\pi|k|^2 s \tilde{f}_0(ks). \end{aligned}$$

Aşadar

$$\widehat{\rho}(t, k) = \widetilde{f}_i(k, kt) - 4\pi^2 \widehat{W}(k) \int_0^t |k|^2 (t - \tau) \widetilde{f}_0(k(t - \tau)) \widehat{\rho}(\tau, k) d\tau.$$

Să punem

$$p_0(\eta) = 4\pi^2 \eta \widetilde{f}_0(\eta).$$

(Nu ştiu dacă e o idee bună să-l pun pe 4π aici...) În unele cazuri (ca f_0 maxwelliană), p_0 e pozitivă; dar, în general, nu-i nici un motiv să fie așa. Observăm că p_0 are descreștere rapidă dacă $f_0 \in W^{\infty,1}(\mathbb{R}^d)$; are descreștere exponențială dacă f_0 e analitică etc. Până la urmă, obținem

$$\widehat{\rho}(t, k) = \widetilde{f}_i(k, kt) - \widehat{W}(k) \int_0^t p_0(k(t - \tau)) \widehat{\rho}(\tau, k) |k| d\tau.$$

Luând transformata Laplace în $\lambda \in \mathbb{R}$ obținem, dacă totul e bine definit,

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}\widehat{\rho})(\lambda, k) &= \int_0^\infty e^{\lambda t} \widetilde{f}_i(k, kt) dt - \widehat{W}(k) \\ &\quad \times \left(\int_0^\infty e^{\lambda t} p_0(kt) |k| dt \right) (\mathcal{L}\widehat{\rho})(\lambda, k); \end{aligned}$$

de unde rezultă

$$(\mathcal{L}\widehat{\rho})(\lambda, k) = \frac{\int_0^\infty e^{\lambda t} \widetilde{f}_i(k, kt) dt}{1 + \widehat{W}(k) Z\left(\frac{\lambda}{|k|}\right)},$$

adică

$$Z(\lambda) = \int_0^\infty e^{\lambda t} p_0(te) dt, \quad |e| = 1.$$

Capitolul 5

Kyoto, 2 august 2008

Zgomotul asurzitor al greierilor a încetat, dar în căminul studențesc internațional Shugaku-in, căldura sufocantă nu se domolește până spre miezul nopții.

În timpul zilei, am încheiat o serie de cursuri destinate participanților la colocviu, cercetători și studenți veniți din cinci-sprezece țări. Prelegerile au fost bine primite. Am început la ora stabilită – cu aproximație de un minut – și am încheiat la ora stabilită – cu o aproximație de un minut. În țara asta, nu se pune problema să tratezi lejer programul, trebuie să fii la fel de punctual ca feribotul care m-a adus la Hokkaido săptămâna trecută.

Seara, la cămin, le-am povestit copiilor aventurile lui Korako, micul corb japonez care se trezește într-o zi abandonat de părinți și pleacă într-o lungă călătorie prin Franța și Egipt, prin circuri și piețe arăbești, în căutarea unui cod secret, alături de foarte tânărul său stăpân Arthur. O poveste cu multe înflorituri, improvizată, o „poveste imaginară“, cum zice fețița mea, pe-astea le preferă – sunt și cele mai palpitate pentru povestitor.

Acum, copiii dorm și, de data asta, n-am întârziat să le urmez exemplul cel bun. După povestea imaginară pe care le-am servit-o tinerilor cercetători și după povestea imaginară a corbului pe care am inventat-o pentru copiii mei, mi-am câștigat dreptul să-mi spun și mie o poveste imaginară: creierul meu s-a aruncat într-un vis neverosimil.

Povestea ia proporții, și mă trezesc brusc, puțin după 5:30. După secunda binecuvântată în care te întrebi pe ce continent îți vii în fire, mă apuc să notez pe laptop fragmentele rămase din vis, înainte să le șteargă bruma de dimineață. Complexitatea și confuzia visului mă binedispun, le iau ca pe un semn de sănătate a creierului. Visele mele nu sunt atât de nebunești ca acelea pe care David B. le-a reprezentat în benzi desenate, dar sunt suficient de întortocheate ca să mă simt bine.

De câteva luni, am lăsat deoparte amortizarea Landau. N-am avansat în vreo demonstrație anume, dar am depășit un prag: acum știu ce vreau să demonstrez. *Să arăt că o soluție a ecuației lui Vlasov neliniară, periodică în spațiu, apropiată de un echilibru stabil, evoluează spontan către un alt echilibru.* E un enunț abstract, dar bine ancorat în realitate, într-o tematică de mare importanță practică și teoretică; o problemă care se enunță ușor, dar care e, probabil, dificil de demonstrat; o întrebare originală despre un model bine-cunoscut. Toată chestia asta-mi place grozav: păstrez problema într-un ungher al creierului, o s-o reiau toamna asta, în septembrie.

Dincolo de răspunsul la întrebare (adevărat sau fals), sper din tot sufletul să am multe de învățat din demonstrație! În matematică, e la fel ca într-un roman polițist sau ca într-un episod din *Columbo*: raționamentul prin care detectivul îl păcălește pe asasin e la fel de important ca soluția însăși a misterului.

Până atunci, îmi cultiv alte iubiri: adaug un appendice la un memoriu scris cu doi în urmă; înaintez cu un articol care combină ecuațiile cineticii cu geometria riemanniană. Între *estimări ale pozitivității locale pentru ecuații hipoeliptice* și *ecuația Fokker-Planck cinetică în geometria riemanniană*, n-am cum să mă plictisesc în lungile mele seri japoneze.

OPTIMAL TRANSPORT AND GEOMETRY

Kyoto, 28 July - 1 August 2008

Cédric Villani

ENS Lyon
& Institut Universitaire de France
& JSPS

Plan of the course

(5 chapters)

- Basic theory
- The Wasserstein space
- Isoperimetric/Sobolev inequalities
- Concentration of measure
- Stability of a 4th order curvature condition

Most of the time statements, sometimes elements of proof

Gromov–Hausdorff stability of dual Kantorovich pb

- $(\mathcal{X}_k, d_k) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{GH} (\mathcal{X}, d)$ via ε_k -isometries $f_k : \mathcal{X}_k \rightarrow \mathcal{X}$
- $c_k(x, y) = d_k(x, y)^2/2$ on $\mathcal{X}_k \times \mathcal{X}_k$
- $\mu_k, \nu_k \in P(\mathcal{X}_k) \quad (f_k)_\# \mu_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \mu, (f_k)_\# \nu_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \nu$
- $\psi_k : \mathcal{X}_k \rightarrow \mathbb{R}$ c_k -convex, $\psi_k^{c_k}(y) = \inf_x [\psi_k(x) + c_k(x, y)]$, achieving $\sup \left\{ \int \psi_k^{c_k} d\nu_k - \int \psi_k d\mu_k \right\}$

Then up to extr. $\exists a_k \in \mathbb{R}$ s.t. $(\psi_k - a_k) \circ f'_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \psi$,
 ψ c -convex achieving $\sup \left\{ \int \psi^c d\nu - \int \psi d\mu \right\}$.

Moreover $\forall x \in \mathcal{X}$, $\limsup_{k \rightarrow \infty} f_k \left(\partial_{c_k} \psi_k (f'_k(x)) \right) \subset \partial_c \psi(x)$.

*

Korako (extras din sinopsisul scris a posteriori)

La momentul oportun, Korako aruncă o fiolă cu sulf în adăpost, un truc pe care l-a învățat în anii de circ. Mirosul e cumplit, gardienilor li se face rău, iar Hamad și Tchitchoun se apucă să umple gurile de aerisire cu nisip.

Ura! Cu funiile smulse, adăpostul se năruie, Hamad îi ucide pe toți... (Lungă descriere apocaliptică.) E găsit tatăl lui Arthur, la fel și tovarășul său de suferință. Fusesse răpit ca să i se smulgă informații despre un document confidențial: un papirus vechi care conținea un secret cu care poți învia mumiile. Colegul lui era, la fel ca el, egiptolog, specialist în hieroglifice.

Banțiții au fost luați prizonieri, sunt duși la Nebun, li se spune că vor fi omorâți și torturați dacă nu mărturisesc cine e șeful lor. Interogatoriile se țin lanț. Korako e stânjenit de felul în care reacționează tatăl lui Arthur. Cu atât mai mult cu cât pare să se simtă bine, cunoaște locul ca și cum ar fi trăit deja aici. Korako se hotărăște să asiste la un interogatoriu de la care se întoarce cu o mare surpriză: Nebunul și tatăl lui Arthur erau cunoștințe vechi. A doua zi se duce la Arthur și îi dă vestea îngrijorătoare.

*

Vis din 2 august 2008 (note)

Fac parte dintr-un film istoric și aparțin unei familii domnitoare. În vis, o parte istorică, în același timp film, iar eu particip concomitent la mai multe niveluri ale narațiunii. Numai că prințul chiar n-are noroc. Îl bat la cap întruna. Mulțimea, presa, presiune mare. Regele (= tatăl prințesei) trage sfori, chestii cu bani, cu dedesubturi. Libertățile nu sunt cu adevărat garantate. Mă înfurii pe *Le Monde* comentându-le prima pagină. Iar au făcut prostii în politică. Dar o mare preocupare internațională se leagă de creșterea prețurilor materiilor prime, suferă țările nordice, unde o parte importantă din venit e legată de transportul acestora, mai ales Islanda sau Groenlanda. În orice caz, nu se prevede vreo ameliorare. Vorbesc despre posibilitatea de a merge, de pildă, la Paris sau de a mă întâlni cu sportivi celebri, ei sunt adevăratele celebrități. Bat la fund hologramele care-i reprezintă pe copiii mei... Dar se hotărăște o sinucidere colectivă. La ora stabilită, mă întreb dacă toată lumea e prezentă. Lipsește Vincent Beffara, care juca rolul unuia dintre copii. Acum însă nu mai e potrivit cu rolul, filmările au durat prea mult, iar Vincent a crescut; în locul lui, folosim de două ori același actor, la final n-are prea multe de zis, un copil e de-ajuns. Sunt foarte emoționat, declanșăm operațiunile. Privesc afișele și reclamele de pe ziduri, e vorba despre persecuțiile de demult împotriva unor ordine de maici, își despleteau părul înainte să meargă la moarte, iar asta era valabil pentru două ordine diferite, deși, potrivit credinței, numai cele dintr-un ordin anume mureau în felul acesta, numai ele trebuiau să se despletească. E și un tablou intitulat *Elogiul disidenței* sau ceva asemănător. În el, un fel de monștri/polițiști înfulecă niște manifestanți care au un aer vag contestatar. O mai sărut o dată pe Claire, suntem foarte emoționați. E aproape 5 dimineața, toată familia e aici, va trebui să apelăm la un serviciu de genul salubritate, cineva să-și prefacă vocea,

să explice că avem nevoie de explozibil și că-l pot trimite aici; dacă vor aduce vorba despre precauții sau așa ceva, vom spune (în engleză): mulțumesc, tocmai am ieșit din ospiciu (se subînțelege: sunt periculos cu explozibilul ăsta), tipul o să creadă că e o glumă și o să trimită totul, și-atunci totul va sări în aer. Ora prevăzută e 5:30. Mă întreb dacă voi continua să trăiesc într-o realitate alternativă, dacă voi încerca într-o altă direcție, sau dacă voi renaște ca bebeluș și voi sta în purgatoriul inocenților ani de zile, înainte să-mi reapară conștiința... Sunt destul de îngrijorat. Trezirea la 5:35 (ora reală!).

Capitolul 6

Lyon, toamna 2008

Trec zile și nopți
în tovărășia Problemei.

În apartamentul meu de la etajul cinci, în imobilul fără ascensor în care locuiesc, la birou, în pat...

În fotoliu, în fiecare seară, cu fiecare ceai, explorând piste și sub-piste, notând meticulos toate posibilitățile, eliminând drumurile înfundate pe măsură ce apar.

Într-o zi din octombrie, o matematiciană coreeană, fostă elevă a lui Yan Guo, mi-a trimis un manuscris despre amortizarea Landau, pentru o eventuală publicare într-o revistă la care sunt editor: „*On the existence of exponentially decreasing solutions of the nonlinear Landau damping problem*“.

O clipă, am crezut că ea și colaboratorul ei au demonstrat rezultatul la care țin atât de mult: construiesc soluții ale ecuației Vlasov care relaxează în mod spontan către un echilibru! I-am scris imediat editorului-șef că sunt în conflict de interese și nu mă pot ocupa de acest manuscris.

Dar, uitându-mă mai atent, am înțeles că erau departe de țel: demonstrau numai existența anumitor soluții amortizate; or, ceea ce trebuie demonstrat e că toate sunt așa! Dacă știm doar că unele soluții sunt amortizate, nu vom ști niciodată dacă nimerim pe una dintre ele... și-apoi, un articol a doi italieni, publicat acum zece ani, demonstra un rezultat destul de apropiat, cei de-acum nu păreau să fie la curent.

Nu, Problema n-a cedat. Ar fi fost, de altfel, dezamăgitor să fie așa simplu! Un articol de vreo treizeci de pagini, bun, dar fără dificultăți majore. În străfundul meu, sunt convins că soluția cere mijloace complet noi și trebuie să ne aducă, în plus, o privire nouă asupra problemei.

— Am nevoie de o normă nouă.

O normă, în jargon matematic, e o regulă pe care ți-o dai pentru a măsura mărimea cantității care te interesează. Dacă faceți o comparație între pluviometria la Brest și la Bordeaux, cum procedați: comparați precipitațiile maxime dintr-o zi, sau integrați pe tot anul? Dacă se compară maximumul, folosiți norma sup care răspunde la gingașul nume de normă L^∞ . Dacă se compară cantitățile integrate, e vorba despre o altă normă, căreia i se spune L^1 . Și mai sunt multe altele.

Pentru a se putea numi „normă“, trebuie să verifice câteva proprietăți; de exemplu, norma unei sume de doi termeni trebuie să fie inferioară sau egală cu suma normelor acestor termeni luați separat. Dar asta încă lasă multe alegeri posibile.

— Am nevoie de norma cea bună.

De mai bine de un secol, de când a fost formalizat conceptul de normă, matematicienii le-au tot inventat. Cursul pe care îl predau la anul al doilea la ENS Lyon e plin de ele. Norme ale lui Lebesgue, Sobolev, Hilbert, Lorentz, Besov, Hölder, normele lui Marcinkiewicz și Lizorkin. Norme L^p , $W^{s,p}$, H^s , $L^{p,q}$, $B^{s,p,q}$, H^a , M^p , $F^{s,p,q}$ și câte și mai câte!

De data asta însă, nici una dintre normele pe care le știu nu pare potrivită. Trebuie să meșteresc una nouă, s-o scot dintr-un mare joben matematic.

— Norma visurilor mele va trebui să fie aproape stabilă la compunere în vecinătatea identității... și să se acomodeze cu filamentarea proprie ecuației lui Vlasov în timp mare. *Gott im Himmel*, cum ar putea? Am încercat să iau sup-ul cu ponderi, poate-o fi necesar să introduc o întârziere... Vorbind cu Clément, zisesem că trebuie să păstrăm memoria timpului scurs,

să comparăm cu soluția transportului liber, OK, n-am nimic împotriva, dar în ce sens trebuie să fac comparația?

Într-o zi, citind din nou tratatul lui Alinhac-Gérard, am remarcat un exercițiu. Să se arate că o anumită normă W e o normă de algebră. Altfel spus, norma W a produsului a doi termeni este cel mult egală cu produsul normelor W ale acestor doi termeni luați separat. Știu exercițiul ăsta de mult, dar, revăzându-l, am început să bănuiesc că ar putea fi util în Problemă.

— Uau, dar ar trebui să modific evaluarea în 0 punând un sup, sau măcar o integrală, și asta n-o să meargă în variabila de poziție, îmi va trebui încă o normă de algebră... poate cu Fourier?

Pe 19 noiembrie, după câteva încercări nereușite, cred că am găsit norma. Pe vremea aceea, înnegream paginile în fiecare seară și-i trimiteam lui Clément rezultatele pe măsură ce scriam. Mașina se pornise. *Cédurak go!*

*

Fie D discul unitate din \mathbb{C} și fie $W(D)$ spațiul funcțiilor olomorfe pe D care satisfac condiția

$$\|f\|_{W(D)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|f^{(n)}(0)|}{n!} < +\infty.$$

Să se arate că, dacă $f \in W(D)$ și dacă g e olomorfă în vecinătatea valorilor luate de f pe D , atunci $g \circ f \in W(D)$.

Indicație: se va observa că $\|h\|_{W(D)} \leq C \sup_{z \in D} (|h(z)| + |h''(z)|)$, și că $W(D)$ e o algebră; apoi se va scrie $f = f_1 + f_2$ cu $f_2(z) = \sum_{n>N} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$, N fiind ales suficient de mare pentru ca seria $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{(n)}(f_1)}{n!} f_2^n$ să fie bine definită și convergentă în $W(D)$.

S Alinhac & P. Gérard

Opérateurs pseudo-différentiels et théorème de Nash-Moser
(capitolul III, exercițiul A.1.a)

*

Date: Tue, 18 Nov 2008 10:13:41 +0100
 From: Clement Mouhot
 <clement.mouhot@ceremade.dauphine.fr>
 To: Cedric Villani <Cedric.VILLANI@umpa.ens-lyon.fr>
 Subject: Re: Dimanche IHP

M-am uitat pe ultimele tale mailuri, o sa citesc atent, ridic manusa ca sa incerc sa integrez totul intr-o teorema de stabilitate pentru solutia transportului cu perturbare analitica mica! urmarea curind! clement

Date: Tue, 18 Nov 2008 16:23:17 +0100
 From: Clement Mouhot
 <clement.mouhot@ceremade.dauphine.fr>
 To: Cedric Villani <Cedric.VILLANI@umpa.ens-lyon.fr>
 Subject: Re: Dimanche IHP

O remarca vaga dupa ce m-am uitat la un articol al lui Tao (ma rog, rezumatul pe care l-a pus pe blog) despre turbulenta slabă si Schrodinger cubic 2d defocusant.

Definitia sa pentru turbulenta slaba e: pierderea masei in variabila frecventa asimptotic, iar definitia lui pentru turbulenta tare este: pierderea masei in variabila frecventa in timp finit. Uite conjectura pe care-o formuleaza pentru ecuatia lui: Conjectura.* (Weak turbulence) There exist smooth solutions $u(t,x)$ to (1) such that $\|u(t)\|_{H^s(\mathbb{T}^2)}$ goes to infinity as $t \rightarrow \infty$ for any $s > 1$.

De vazut daca se poate arata asta si pentru solutiile pe care incercam sa le construim (pentru transportul liber, derivatele in x chiar explodeaza). Ca si in cazul nostru, se pare ca au

nevoie de marginire prin tor pentru a putea vedea fenomenul fara sa-l anuleze dispersia in variabila reala x . Dimpotriva o smecherie pe care n-o pricepe e ca sustine ca acest fenomen e neliniar si ca nu poate fi observat in cazurile liniare. In cazul nostru pare prezent deja la nivel liniar...

va urma, clement

Date: Wed, 19 Nov 2008 00:21:40 +0100
 From: Cedric Villani <Cedric.VILLANI@umpa.ens-lyon.fr>
 To: Clement Mouhot
 <clement.mouhot@ceremade.dauphine.fr>
 Subject: Re: Dimanche IHP

Asadar, uite ce-am facut azi. Am pus cateva observatii in plus in fisierul Estimari, suprimat prima sectiune care devenise mai degraba caduca si regrupat variile estimari dispersate prin diferite fisiere, asa incit totul e in mare intr-un singur fisier.

Cred ca inca nu ne-am lamurit asupra normei cu care sa lucram:

- cum ecuatiile in ρ in cazul unui camp omogen nu e integrala decat in timp (!) suntem obligati sa lucram intr-o norma fixata care, in consecinta, trebuie sa fie stabila fata de actiunea prin compunerea cu Ω .
- pare ca se impune Fourier ca sa avem preschimbarea analiticului in descrestere exponentiala. Nu stiu sa fac convergenta exponentiala direct, fara Fourier, sigur ar trebui sa fie fezabil.
- cum schimbarea de variabila e in (x,v) si transformata Fourier a lui ρ e un Dirac in η , am impresia ca avem nevoie de o norma analitica de tipul L^2 in k si L^1 in η .
- dar compunerea sigur n-o sa fie niciodata continua intr-un spatiu de tip L^1 , deci nu-i asta, trebuie sa fim foarte isteti, probabil sa incepem "integrand"

\eta. Ar ramane o norma de tip L^2 analitica in variabila k .

Concluzie: Trebuie sa fim si mai isteti.

Va urma,
Cedric

Date: Wed, 19 Nov 2008 00:38:53 +0100
From: Cedric Villani <Cedric.VILLANI@umpa.ens-lyon.fr>
To: Clement Mouhot
<clement.mouhot@ceremade.dauphine.fr>
Subject: Re: Dimanche IHP

On 11/19/08, 00h21, Cedric Villani wrote:
> Concluzie: Trebuie sa fim si mai isteti.
Right now impresia mea e ca pentru a o scoate la capat avem nevoie de teorema asta de continuitate a compunerii cu Ω pentru norma analitica L^2 in Fourier (fara pierderea ponderilor...) si considerand η ca pe un parametru. Asta e, pe maine :-)

Date: Wed, 19 Nov 2008 10:07:14 +0100
From: Cedric Villani <Cedric.VILLANI@umpa.ens-lyon.fr>
To: Clement Mouhot
<clement.mouhot@ceremade.dauphine.fr>
Subject: Re: Dimanche IHP

Dupa o noapte de somn mi se pare NEREALIST:
actiunea prin compunere cu Ω va duce AUTOMAT la o mica pierdere in λ (oricum asa se intampla cand $\Omega = (1 - \epsilon)\text{Id}$). Asa ca va trebui sa ne obisnuim cu asta in ciuda parentelor.

Va urma...
Cedric

Date: Wed, 19 Nov 2008 13:18:40 +0100
From: Cedric Villani <Cedric.VILLANI@umpa.ens-lyon.fr>

To: Clement Mouhot
<clement.mouhot@ceremade.dauphine.fr>
Subject: update

Atasat fisierul adus la zi:
Am adaugat subsectiunea 3.2 in care examinez o
obiectie de fond aparent legata de o chestie despre
care-am vorbit la telefon, problema pierderii de
spatiu functional provocata de schimbarea de
variabila. Concluzia e ca nu e nimic pierdut, dar
va trebui sa fim foarte exacti in privinta
estimarii schimbarii de variabila.
Cedric

Date: Wed, 19 Nov 2008 14:28:46 +0100
From: Cedric Villani <Cedric.VILLANI@umpa.ens-lyon.fr>
To: Clement Mouhot
<clement.mouhot@ceremade.dauphine.fr>
Subject: update

Inca o adaugire la sfarsitul sectiunii 3.2. Acum
arata destul de bine.

Date: Wed, 19 Nov 2008 18:06:37 +0100
From: Cedric Villani <Cedric.VILLANI@umpa.ens-lyon.fr>
To: Clement Mouhot
<clement.mouhot@ceremade.dauphine.fr>
Subject: update

Cred ca actuala sectiune 5 e gresita!! Problema
apare dupa locul in care scrii „Repartizand puterile
si factorialele”: randul care urmeaza arata OK, dar
in formula de mai jos indicii nu se mai potrivesc
 $(N_{k-i+1}) / (k-i+1)!$ ar trebui sa dea $N_k/k!$
si nu $N_k/(k+1)!$
De fapt, rezultatul mi se parea mult prea tare. Ar
fi insemnat ca prin compunerea cu o aproximare a
identitatii se pastreaza acelasi indice al normei
analitice. In timp ce eu cred ca ar trebui sa
tintim ceva de tipul

$\|f\|_{\text{circ } G} \|_{\lambda} \leq \text{const.}$

$\|f\|_{\{\lambda\}} \|G\| \|G\|$

sau ceva in genul asta.

Va urma,

Cedric

Date: Wed, 19 Nov 2008 22:26:10 +0100

From: Cedric Villani <Cedric.VILLANI@umpa.ens-lyon.fr>

To: Clement Mouhot

<clement.mouhot@ceremade.dauphine.fr>

Subject: good news

Din versiunea atasata am eliminat sectiunea 5 cu bugul (putem s-o recuperam oricand la nevoie) si am inlocuit-o cu calcule despre compunere, folosind tot aceleasi variante analitice care, de data asta, parca merg ca unse fata de compunere (formula pe care o sugerasesem nu e cea buna, pana la urma e si mai simpla, dar de acelasi tip).

Va urma, Cedric

Date: Wed, 19 Nov 2008 23:28:56 +0100

From: Cedric Villani <Cedric.VILLANI@umpa.ens-lyon.fr>

To: Clement Mouhot

<clement.mouhot@ceremade.dauphine.fr>

Subject: good news

Noua versiune atasata. Am verificat ca acel calcul obisnuit se poate face cu norma sugerata de regula de compunere (sectiunea 5.1). E un piculet mai complicat dar pare sa dea acelasi tip de rezultat. Gata pe azi.

Cedric.

Capitolul 7

Bourgon-Jallieu, 4 decembrie 2008

Farurile ieșite din beznă mă orbesc la ieșirea din parking. Mă apropii, e a treia încercare.

— Scuzați, mergeți cumva la Lyon?

— Păi... da.

— Mă puteți lua și pe mine? La ora asta nu mai sunt trenuri!

Șoferița ezită o clipă, aruncă o privire către pasageri și mă invită să urc în spate. Mă așez.

— Mii de mulțumiri!

— Ați fost la concert, nu?

— Da, da, a fost tare mișto.

— Îhî, foarte fain.

— După ce-am ascultat douăzeci de ani Têtes Raides*, nu puteam pierde ocazia asta. Dar detest să conduc, așa c-am venit cu trenul, spunându-mi că nu se poate să nu găsesc un lionez care să mă aducă în oraș.

— Cu plăcere, nici o problemă. Eu am venit cu fiul meu, iar cel de lângă dumneavoastră e prietenul lui.

Bună seara tuturor...

— Pogo-ul n-a fost prea dur, sala era mare, nu ne călcam pe picioare, a fost în regulă.

— Da, fetele n-au avut de ce să se plângă.

— Lasă, că unora le place când se-ncinge mai tare!

* Grup francez de folk-rock. (N. t.)

Nostalgia după o fermecătoare punkistă cu piercinguri, debordând de energie, pe care hazardul unui pogo mi-o aruncase în brațe la un concert al lui Pigalle.

— E drăguț păianjenul dumneavoastră.

— Da, port întotdeauna un păianjen, ăsta-i stilul meu, le comand special la Lyon. Atelierul Libellule.

— Sunteți muzician?

— Nu!

— Artist?

— Matematician!

— Poftim, matematician?

— Da, da... există și-așa ceva!

— Și cu ce vă ocupați?

— Hmmm, *chiar* vreți să știți?

— Pe bune, nu fac mișto.

Trag aer în piept.

— Am dezvoltat o noțiune sintetică de curbura Ricci minorată în spațiile metrice complete cu măsură și local compacte.

— Poftim?! Faceți mișto de mine?

— Deloc. E un articol care a avut o mulțime de ecouri în comunitate.

— Puteți să repetați? Sună prea fain!

— Păi, da, am dezvoltat o noțiune sintetică de curbura Ricci minorată în spațiile metrice cu măsură separabile, complete și local compacte.

— Uau! Și la ce-i bună?

S-a spart gheața, îmi dau drumul. Explic pe îndelete, vorbesc, demistific. Teoria relativității a lui Einstein, curbura care deviază razele de lumină. Curbura, piatra unghiulară a geometriei neeuclidiene. Curbura pozitivă, razele se apropie; curbura negativă, razele se depărtează. Curbura, care se explică prin cuvinte din optică, se poate exprima și prin cuvintele fizicii statistice: densitate, entropie, dezordine, energie cinetică, energie minimă... asta-i descoperirea pe care am făcut-o împreună cu

câțiva colaboratori. Cum să vorbești despre curbura într-un spațiu cu țepi ca un arici? Problema transportului optimal, care se întâlnește în inginerie, în meteorologie, în informatică, în geometrie. Cartea mea de o mie de pagini. Vorbesc, vorbesc pe măsură ce kilometrii se scurg.

— Gata, intrăm în Lyon. Unde vă las?

— Locuiesc în arondismentul unu – cartierul intelectualilor! Dar lăsați-mă unde vă e mai comod, mă descurc.

— Nici o problemă, vă duc acasă, doar să-mi spuneți pe unde o iau.

— Super. Cât vă datorez, pot să contribui la taxa de autostradă?

— Lăsați, nu e cazul.

— Mulțumesc, sunteți minunată.

— Înainte să plecați, puteți să-mi scrieți o formulă matematică?

*

Două figuri extrase din *Optimal Transport, Old and New*, C. Villani, Springer-Verlag, 2008.

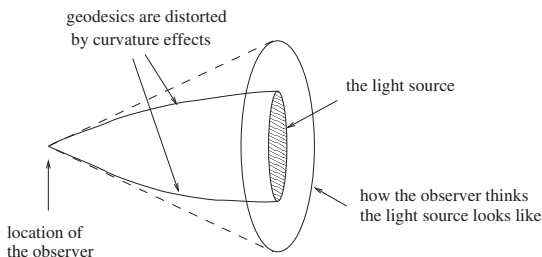


FIG.14.4 – The meaning of distortion coefficients: Because of positive curvature effects, the observer overestimates the surface of the light source; in a negatively curved world this would be the contrary.

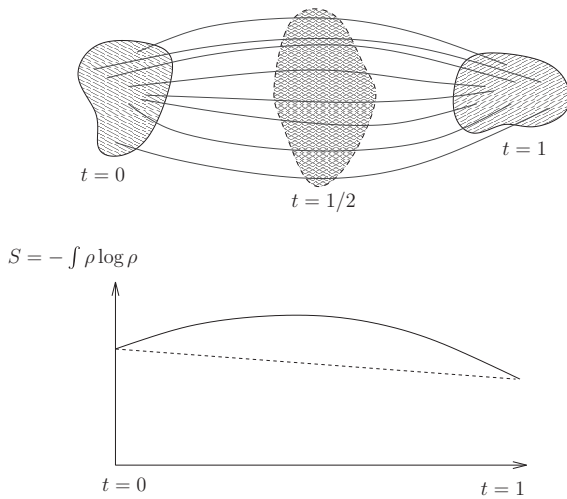


FIG. 16.2 – The lazy gas experiment: To go from state 0 to state 1, the lazy gas uses a path of least action. In a nonnegatively curved world, the trajectories of the particles first diverge, then converge, so that at intermediate times the gas can afford to have a lower density (higher entropy).

Capitolul 8

Un sat din departamentul Drôme, 25 decembrie 2008

Sărbători cu familia. Am înaintat bine.

Patru fișiere informatice, aduse la zi simultan pe măsură ce progresăm, conțin tot ce am înțeles despre amortizarea Landau. Patru fișiere pe care le-am schimbat între noi, le-am completat, corectat, luat din nou la mână și le-am presărat cu note – **NdCM** pentru observațiile lui Clément, **NdCV** pentru ale lui Cédric. Scrise în limbajul $\text{T}_\text{E}\text{X}$ al lui Knuth, maestrul nostru, al tuturor, sunt cum nu se poate mai potrivite pentru manevrele noastre de apropiere.

Acum câțva timp, ne-am revăzut la Lyon, și Clément a tunat împotriva unei inegalități pe care o scrisesem într-unul din fișiere:

$$\|e^{if}\|_\lambda \leq e^{\|f\|'_\lambda}.$$

Se jura că nu reușește să priceapă cum puteam să susțin așa ceva și am fost nevoit să recunosc că vorbele mi-o luaseră înaintea gândului. Mi s-a părut că e evidentă inegalitatea asta, dar acum, gândindu-mă mai bine, nu știam ce mă făcuse s-o scriu și nici de ce mi se părușe evidentă.

Nici în ziua de azi nu știu cum de-am crezut în inegalitatea aceea, dar am înțeles de ce e adevărată! Din cauza formulei lui Faà di Bruno.

Acum șaisprezece ani, la Școala Normală Superioară din Paris, profesorul nostru de geometrie diferențială ne prezentase această formulă care dă derivatele succesive ale funcțiilor

compuse; era atât de complicată, încât am primit-o cu râsete, iar el a fost nevoit să se scuze cu un aer jalnic și autoironic: „Nu râdeți, e foarte utilă!”

Și într-adevăr, formula asta e utilă, avea dreptate: mulțumită ei e adevărată misterioasa mea inegalitate!

Acestea fiind spuse, trebuia să avem răbdare. Jur (în fața lui Boltzmann, Knuth și Landau la un loc) că timp de șaisprezece ani formula asta nu-mi servise la nimic, așa că-i uitasem până și numele, altminteri deloc banal.

Dar îmi rămăsese într-un colțișor al creierului: există o formulă pentru derivatele funcțiilor compuse... Cu Google și cu Wikipedia, n-am avut nevoie decât de câteva clipe ca să regăsesc numele formulei și formula însăși.

În orice caz, apariția formulei lui Faà di Bruno e simptomatică pentru înfățișarea combinatorie neașteptată pe care o ia lucrarea noastră. Notele mele sunt acoperite de obicei cu urechi de violoncel (integrale: \int – am scris atâtea, că-mi vin în minte automat de îndată ce mă concentrez!); de data asta, notele mele sunt infestate de exponenți între paranteze (derivate multiple: $f^{(4)} = f''''$) și cu puncte de exclamație (factoriale: $16! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times 16$).

De fapt, se potrivește: în timp ce copiii își deschid excitații cadourile de Crăciun, eu agăț exponenți la funcții ca globurile-n brad și aliniez factoriale ca tot atâtea lumânări răsturnate.

*

Donald Knuth este Dumnezeu viu al informaticii. „Dacă-ai intra în sală în timpul conferinței”, spunea într-o zi un amic, „toți participanții i-ar cădea în genunchi”.

Profesor la Universitatea Stanford, Knuth a ieșit anticipat la pensie și și-a tăiat poșta electronică pentru a se consacra în întregime încheierii operei sale majore, Arta programării, începută cu cincizeci de ani în urmă, ale cărei câteva volume deja apărute au revoluționat domeniul.



Donald Knuth

Publicând minunile astea, Knuth și-a dat seama de calitatea grafică jalnică a formulelor matematice, așa cum erau ele redată cu softurile disponibile în comerț; și-a făgăduit să vindece pentru totdeauna răul. Nu era de-ajuns să schimbe editorul sau fonturile, s-a hotărât să schimbe întreg procesul din rădăcină. În 1989, a publicat prima versiune stabilă a softului \TeX , devenit astăzi standardul cu care toți matematicienii își compun și comunică articolele.

Acest nou strat de universalitate și-a jucat din plin rolul atunci când schimbările matematice au devenit masiv electronice, la începutul secolului XXI.

Limbajul lui Knuth și derivatele sale sunt softuri libere ale căror coduri sunt accesibile oricui. Matematicienii își trimit unul altuia numai fișierul sursă, fișier-text constituit doar din caractere ASCII, recunoscute de toate calculatoarele din lume. Acest fișier conține, într-un limbaj sobru, toate instrucțiunile necesare pentru a reconstitui textele și formulele în cele mai mici detalii.

Mulțumită acestui soft, dintre toți cei aflați în viață, Knuth e probabil acela care a schimbat cel mai mult viața de zi cu zi a matematicienilor.

Knuth n-a încetat să-și perfecționeze creația, atribuindu-i numere de versiuni care sunt aproximații ale lui π , cu atât mai precise cu cât softul e mai complet: după versiunea 3.14 urmează versiunea 3.141, apoi 3.1415 etc. Versiunea curentă este 3.1415926; conform testamentului lui Knuth, va trece la π în ziua morții sale, încremenind astfel $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ pentru eternitate.

*

Formula lui Faà di Bruno (Arbogast 1800, Faà di Bruno 1855)

$$(f \circ H)^{(n)} = \sum_{\sum_{j=1}^n j m_j = n} \frac{n!}{m_1! \dots m_n!} (f^{(m_1 + \dots + m_n)} \circ H) \prod_{j=1}^n \left(\frac{H^{(j)}}{j!} \right)^{m_j}$$

... Ceea ce în $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ se scrie

```
\[ f \circ H ^{ ( n ) } = \sum_{ \sum_{ j = 1 } ^ n j \, m_j = n } \frac{ n ! }{ m_1 ! \ldots m_n ! } \, ,
```

$$\bigl(f^{(m_1 + \ldots + m_n)} \circ H \bigr) \, ,$$

$$\prod_{ j = 1 } ^ n \left(\frac{ H^{ (j) } }{ j ! } \right) ^{ m_j } \]$$

*

Date: Thu, 25 Dec 2008 12:27:14 +0100 (MET)
 From: Cedric Villani <Cedric.VILLANI@umpa.ens-lyon.fr>
 To: Clement Mouhot
 <clement.mouhot@ceremade.dauphine.fr>
 Subject: Re: partile 1 si 2, aproape gata

Uite, de Craciun ai dreptul si la partea a II-a. Arata foarte bine, pana la urma, in mare, totul merge mai bine decat puteam spera (doar ca pierderea in exponent pare sa fie cel putin ca radacina cubica din marimea perturbarii, dar nu-s motive sa nu putem corecta asta printr-o schema iterativa de tip Newton). Iti trimit ambele fisiere: analitic si scattering, deocamdata nu ma mai ating de ele. Trebuie recitite la virgula, dar cred ca acum prioritatea e sa facem sa convearga partile 3

si 4 (edp si interpolare), sugerez sa-mi trimiti edp care pare sa stea oarecum in picioare chiar daca nu s-a subtiat destul; asa o sa putem sa tragem in paralel pe edp si pe interpolare. (Ma ocup eu de redactat in engleza si de fatuit...)
Si Craciun fericit!
Cedric

Date: Thu, 25 Dec 2008 16:48:04 +0100
From: Clement Mouhot
<clement.mouhot@ceremade.dauphine.fr>
To: Cedric Villani <Cedric.VILLANI@umpa.ens-lyon.fr>
Subject: Re: partile 1 si 2, aproape gata

Craciun fericit si multam pentru cadouri ;))!
Lucrez la fisierul edp sa fac o teorema completa despre norma sup si mixta, cred ca am sanse mari chiar si in norma mixta de fapt (pentru scattering e intr-adevar in norma conform ultimului tau fisier, deci pare necesar). Pentru fisierul de interpolare, inegalitatea lui Nash precizata de care aveam nevoie e redactata (in franceza) in versiunea pe care ti-o trimisesem, spune-mi daca mai trebuie sa adaug ceva. Urmarea foarte curand! Cu prietenie, Clement

Date: Fri, 26 Dec 2008 17:10:26 +0100
From: Clement Mouhot
<clement.mouhot@ceremade.dauphine.fr>
To: Cedric Villani <Cedric.VILLANI@umpa.ens-lyon.fr>
Subject: Re: partile 1 si 2, aproape gata

Salut,
Uite o versiune preliminara, in engleza, a teoremei edp completa in norma ta mixta. Incepe la pagina 15 a fisierului. Ti-o trimit deja ca sa-ti faci o idee, chiar daca mai am de verificat niste chestii la detaliile de calcul si la indici..., si limitarea la timp marginit care e bizara deocamdata. In orice caz norma mixta pare sa se comporte foarte bine

fata de rationamentul pe care-l faceam despre transferurile de derivate cu normele fara Fourier. Am pus la inceputul sectiunii 4 cu teorema respectiva si observatii despre motivul pentru care mi se pare ca merge bine chestia asta. Dimpotriva lucrez tot cu o norma cu patru indici (chiar daca e o norma mixta, dupa definitia ta) si de fapt deocamdata nu prea vad cum sa trec la doar trei indici...

O sa ma mai gandesc.

Cu prietenie,

Clement

Date: Fri, 26 Dec 2008 20:24:12 +0100

From: Clement Mouhot

<clement.mouhot@ceremade.dauphine.fr>

To: Cedric Villani <Cedric.VILLANI@umpa.ens-lyon.fr>

Subject: Re: partile 1 si 2, aproape gata

Ceea ce numeam „limitarea la timp marginit” e faptul ca pierderea in indice datorata scattering-ului fiind liniara in timp, asa cum am pus-o in ipoteza, dadea un timp marginit pentru a nu avea o pierdere mai mare decat o anumita constanta. Dar din fisierul tau „analitic” mi se pare ca ipoteza ar trebui sa poata fi intarita in ceva ca pierderea

\$\$

$\backslash \text{varepsilon} \backslash, \backslash \min \{1, (t-s) \backslash \}$

\$\$

ceea ce ar permite ca aceasta pierdere sa ramana mica pentru $\$t$ mare si $\$s$ departe de $\$t$...

a+, clement

Capitolul 9

Princeton, 1 ianuarie 2009

Beznă adâncă, șoferul de taxi e complet pierdut. GPS-ul îi indică o direcție evident aiurea, direct în copaci.

Încerc să fac apel la bun-simț: am mai trecut pe-aici, e clar că GPS-ul nu-i actualizat, ar trebui să explorăm împrejurimile. S-ar părea că ne-am rătăcit și e limpede că, dacă urmărim indicațiile aparatului, o să ne împotmolim de tot!

În spate, copiii sunt indiferenți. Fetița a adormit, obosită de călătoria cu avionul și de decalajul orar. Băiatul observă tăcut. Are doar opt ani și a fost deja în Taiwan, în Japonia, Italia, Australia și în California, așa că n-o să-l îngrijoreze un taxi pierdut în mijlocul unei păduri din New Jersey în miezul nopții, știe că până la urmă se-aranjează toate.

Ne învârtim în cerc, dăm iar peste un pic de civilizație și peste o ființă umană într-o stație de autobuz, cerem indicații. Doar nu e GPS-ul deținătorul absolut al adevărului topografic.

În fine, ni se arată Institutul pentru Studii Avansate – IAS pentru intimi. Atât de impunător, drept în mijlocul pădurii, aduce un pic cu un castel. Ca să ajungi la el, trebuie să ocolești terenul de golf, foarte întins.

Aici și-a petrecut Einstein ultimii douăzeci de ani din viață. Sigur că, pe-atunci, nu mai era tânărul vivace din 1905 care revoluționase fizica. A marcat totuși locul acesta prin prezența lui mai mult decât oricine altcineva. Și-apoi, au mai fost John von Neumann, Kurt Gödel, Hermann Weyl, Robert Oppenheimer,

Ernst Kantorowicz, John Nash, toți acești mari gânditori la auzul numelor cărora te înfiori.

Acum sunt Jean Bourgain, Enrico Bombieri, Freeman Dyson, Edward Witten, Vladimir Voevodsky și mulți alții... IAS poate pretinde titlul de templu al matematicii și al fizicii teoretice mai curând decât Harvard, Berkely, New York sau vreo altă instituție. Sigur, nu sunt atâția matematicieni ca la Paris, capitala mondială a matematicii; dar la IAS e distilatul, topul topului.

Și chiar alături e Universitatea Princeton, cu Charles Fefferman, Andrei Okounkov și alții. La Princeton, medaliile Fields sunt o banalitate, ai uneori alături trei sau patru la prânz! Ca să nu mai vorbim de Andrew Wiles, care n-a luat medalia Fields, dar a cărei popularitate a depășit-o pe a oricărui alt matematician când a rezolvat marea enigmă lăsată de Fermat, cea care l-a așteptat trei sute cincizeci de ani pe Făt-Frumos.* Pe scurt, dacă ar exista paparazzi specializați în mari matematicieni, și-ar putea planta aparatele de fotografiat în refectoriul IAS și ar avea zilnic imagini proaspete.

Ai la ce visa... dar nu e timp, trebuie găsită rezidența, apartamentul unde vom locui șase luni și-apoi, pentru început, să dormim.

Ce-o să fac eu vreme de șase luni în orașelul ăsta?

De lucru am, nu-i vorbă! De concentrare am nevoie. Voi putea să mă consacru în întregime iubirilor mele matematice!

În primul rând, trebuie să pot suci în fine gâtul acestei amortizări Landau. Am avansat serios, cadrul funcțional e

* Despre Andrew Wiles și demonstrația pe care a dat-o teoremei lui Fermat, vezi cartea lui Simon Singh *Marea teoremă a lui Fermat* (Editura Humanitas, București, 2012). (N. t.)

gata, hai, îmi mai dau două săptămâni să pun punct. Și apoi să închei un alt proiect, pe cel cu Alessio și Ludovic, nu se poate să nu găsim nenorocitul ăla de contraexemplu ca să demonstrăm că în dimensiune 3 sau mai mare domeniile de injectivitate ale unei metrici riemanniene aproape sferice nu sunt neapărat convexe. O să-l găsim, iar asta o să ucidă teoria regularității transportului optimal neeuclidian!

Apoi îmi mai rămân cinci luni, o să le petrec cu marele meu vis, regularitatea pentru Boltzmann! Mi-am adus notițe mângălite în douăzeci de țări diferite.

Cinci luni s-ar putea să n-ajungă. Aș vrea să-i pot dedica doi ani, tot finalul mandatului meu la Institutul Universitar al Franței, mandatul acesta în timpul căruia am normă didactică redusă ca să-mi duc cu bine la capăt marile proiecte de cercetare.

Dar m-am tot băgat în alte proiecte. A fost a doua carte despre transport optimal, începută în ianuarie 2005. Inițial, voiam să mă mărginesc la 150 de pagini și să predau textul în iulie 2005; până la urmă au ieșit 1 000 de pagini care au fost gata în iunie 2008. De mai multe ori am vrut să mă opresc, ca să mă întorc la Boltzmann. Dar am preferat să continui. De fapt, nu prea știu dacă aveam de ales: cartea a decis totul, nu putea fi altfel.

Am întârziat uneori, din motive la care țin mult... dar nu contează.

Însă iată că nu-mi mai rămân decât optsprezece luni cu norma didactică redusă, și nici măcar n-am început ceea ce urma să fie Marele meu Proiect despre ecuația lui Boltzmann. Așa că invitația asta la Princeton a picat la țanc. Carte – nu, sarcini administrative – nu, cursuri – nu, o să pot face matematică la foc continuu! Tot ce mi se cere e să particip din când în când la discuții și seminarii de analiză geometrică – tema anului la Institute for Advanced Studies.

În schimb, în laborator, n-au fost toți mulțumiți. Mă vedeau director al laboratorului începând din ianuarie 2009, iar

eu tocmai atunci am bătut în retragere. Nimic de făcut, sunt momente când e bine să fii egoist. La urma urmei, am muncit ani la rând pentru a dezvolta echipa de la ENS Lyon și, odată închisă paranteza asta princetoniană, o să tot primesc sarcini administrative pentru binele general.

Și-apoi, e vorba despre Medalie!

Medalia Fields, cea pe care претенdenții abia îndrăznesc s-o numească, MF. Recompensa supremă pentru matematicienii maturi, primită o dată la patru ani, la Congresul Internațional de Matematică, de doi, trei sau patru matematicieni sub 40 de ani.

Sigur, sunt și alte premii tari în matematică! Premiul Abel, premiul Wolf, premiul Kyoto sunt, cu siguranță, și mai greu de obținut decât medalia Fields. Dar nu au același răsunet, aceeași vizibilitate. Și pot fi obținute abia la final de carieră, nu joacă același rol de trambulină și de încurajare. MF strălucește mai tare.

Nu trebuie să te gândești la ea, nu lucrezi pentru ea – asta ar aduce ghinion.

Nici măcar nu e pomenită, evit să-i pronunț numele. Scriu MF și destinatarul pricepe.

Anul trecut, am primit premiul Societății Europene de Matematică, atribuit o dată la patru ani unui număr de zece tineri cercetători europeni. În ochii multor colegi, ăsta era semnul că încă sunt în cursa pentru MF. Printre punctele mele forte, spectrul foarte întins, mai ales pentru generația mea: analiză, geometrie, fizică, ecuații cu derivate parțiale... În plus, tânărul minune din Australia, Terence Tao, nu mai e în cursă: a fost deja medaliat la Congresul Internațional, la 31 de ani abia împliniți.

Dar ce-am reușit eu nu e ireproșabil. Teorema de convergență condițională pentru ecuația lui Boltzmann, de care sunt atât de mândru, presupune regularitatea; ca să fie perfectă, ar fi trebuit s-o demonstrez. Teoria limitelor Ricci în sens slab

abia începe, iar criteriul nostru general de curbura-dimensiune nu e acceptat de toți. Ampla mea deschidere matematică e bună, dar are și neajunsuri: probabil că nici un expert nu stăpânește ansamblul dosarului meu. În orice caz, ca să am o șansă, și chiar pentru echilibrul meu personal, trebuie deja să demonstrez o teoremă grea legată de o problemă semnificativă de fizică.

Pragul ăsta de 40 de ani, ce presiune! N-am decât 35... Dar regula a fost întărită la ultimul Congres Internațional, în 2006, la Madrid. De-acum, trebuie să ai sub 40 de ani la 1 ianuarie al anului Congresului. Am înțeles ce însemna asta pentru mine imediat ce-au publicat noua regulă: în 2014 aș fi prea bătrân cu 3 luni; așadar, MF va fi în 2010 sau niciodată.

Din momentul acela, n-a trecut zi fără ca Medalia să nu se insinueze în mintea mea. Și de fiecare dată am respins-o. Nu există manevre politice, nu se concurează în mod explicit pentru Medalia Fields și, oricum, juriul e secret. Nu vorbesc despre asta cu nimeni. Ca să-mi sporesc șansele de a primi Medalia, nu trebuie să mă gândesc la ea. Să nu mă gândesc la MF, să mă gândesc doar la o problemă de matematică, una care să mă acapareze cu trup și suflet. Iar aici, la IAS, voi fi în locul ideal pentru a mă concentra, pe urmele marilor înaintași.

Și am să locuiesc pe strada Von Neumann!

*

Când s-a declanșat crahul din 1929, familia Bamberger s-a putut considera fericită. Făcuseră avere dintr-un lanț de supermarketuri în New Jersey și-și vânduseră afacerea cu șase săptămâni înainte să se prăbușească totul. Într-o economie în ruină, ei erau bogați, foarte bogați.

Nu folosește la nimic să fii bogat dacă nu-ți pui banii la treabă; așa că au vrut să servească o cauză nobilă, visau să schimbe societatea. S-au gândit la o mare școală de tratamente stomatologice, dar au fost convinși că cea mai eficientă utilizare

a banilor lor ar fi înființarea unui nou institut de științe teoretice. Teoria nu costă foarte mult, cu ce aveau ei puteau pune bazele celui mai bun institut din lume, unul care să strălucească peste mări și oceane!

Și-apoi, în matematică și în fizica teoretică, deși specialiștii nu sunt de acord în toate cele, sunt totuși de acord în privința celor care sunt cei mai buni dintre ei. Iar dacă acești cei mai buni sunt identificați, atunci ar putea fi aduși!

Așa că, pentru noul institut Bamberger, aveau să fie aduși cei mai buni. După ani de negocieri, au acceptat unul după altul. Einstein. Gödel. Weyl. Von Neumann. Și alții... Atmosfera devenise insuportabilă în Europa pentru cercetătorii evrei și pentru prietenii lor, ceea ce a ajutat la deplasarea centrului de greutate al științei mondiale dinspre Germania către Statele Unite. În 1931, visul lui Bamberger se concretiza: era inaugurat Institute for Advanced Studies, Institutul pentru Studii Avansate, chiar alături de prestigioasa și aproape bicentenara Universitate Princeton (ea însăși susținută de o altă familie de mecenafi, legendarii Rockefeller). La IAS, cercetătorii permanenți aveau să primească un salariu mai mult decât confortabil, și nu aveau să aibă nici o obligație didactică.

Institutul a evoluat: azi, în departamentul de științe ale naturii, nu mai găsești doar fizică teoretică sub toate formele ei (astrofizică, fizica particulelor, mecanica cuantică, teoria corzilor...), ci și biologie teoretică. S-au mai adăugat un departament de științe sociale și unul de istorie. Toate cu aceeași tradiție de excelență.

Matematicienii se perindă prin acest templu al cunoașterii, își povestesc ultimele descoperiri, încearcă să atragă atenția celor mai mari. Cei care sunt invitați să rămână câteva luni sau câțiva ani nu trebuie să aibă decât un singur lucru în minte – acela pentru care sunt plătiți: să producă cele mai bune teoreme din lume, sub ochii malițioși ai lui Einstein, care e prezent peste tot, în bronz, pe hârtie fotografică, în tablouri.

Și totul e gândit în așa fel încât matematicienii să nu aibă nici o grijă în afara matematicii. Dacă vii însoțit de familie, copiii îți vor fi înscriși la școală cu mult timp înainte. O armată de secretare se va ocupa de problemele tale materiale. Locuința îți va fi rezervată la câteva minute de Institut. Cantina excelentă te scutește de căutarea unui restaurant, iar pădurea e ideală pentru plimbări. De îndată ce intri în biblioteca de matematică, una ca pe vremuri, o asistentă se aruncă asupra ta ca să te ajute să găsești cartea pe care o cauți sau ca să-ți explice sistemul de fișe pe cât de desuet, pe atât de eficient. Totul pare să-ți spună: Uite, băiețș, ai aici tot ce-ți trebuie, așa că uită-ți grijile, gândește-te numai la matematică, matematică, matematică.

Dacă treceți prin Institut în timpul verii, mergeți la biblioteca de științe umaniste, de cealaltă parte a lacului față de departamentul de matematică – noaptea e pustiu –, și o să vă simțiți ca un explorator care descoperă o peșteră a comorilor din alte vremuri, vechi colecții de hărți de peste un metru, dicționare gigantice, enciclopedii uriașe.

Apoi, ieșind din bibliotecă, opriți-vă pe banca de-alături; noaptea, e cel mai frumos loc din lume. Dacă aveți noroc, veți auzi mugetul cerbilor, veți vedea luminile fantomatice ale licuricilor, veți contempla reflexele lunii oglindindu-se în apele negre și veți simți trecând spectrele unora dintre cele mai puternice minți ale secolului XX, formând un fel de brumă invizibilă deasupra lacului.

Capitolul 10

Princeton, 12 ianuarie 2009

Seara târziu, în apartamentul meu din Princeton, așezat pe jos, pe mochetă, înconjurat de foi de hârtie scrise, în fața geamului de sticlă enorm prin care, ziua, copiii se uită la veverițele cenușii. Mă gândesc și mâzgălesc câte ceva în tăcere.

Alături, în birou, Claire se uită la *Death Note* pe un laptop. Nu există cinematografe în Princeton, așa că serile trebuie ocupate cu ceva. I-am tot lăudat serialul ăsta de desene animate diabolice... a devenit și ea dependentă. Și are prilejul să asculte limba japoneză.

Azi am vorbit la telefon cu Clément. În ultimele zile, am trecut în treapta superioară de viteză. La Princeton, n-am cursuri; iar el, cercetător la CNRS, n-are nici el obligații. Așa că putem lucra după voie.

Și-apoi, decalajul orar dintre colaboratori are avantajele lui. Cu un decalaj de șapte ore, putem lucra aproape continuu. Dacă eu trag până la miezul nopții la Princeton, trei ore mai târziu Clément se află în biroul lui de la Paris ca să preia ștafeta.

Ne-am agățat de un anume calcul. E un artificiu destul de drăguț cu care păcălim timpul de existență a soluției, ne-am pus mari speranțe în el. Din partea mea, îmi doresc din toată inima ca ideea lui să joace un rol important (chiar așa va fi, mult peste ce-mi închipuisem!), dar tot nu reușesc să cred că ideea asta va fi de-ajuns ca să ne salveze. Ne trebuie o altă estimare.

Un alt artificiu.

Date: Mon, 12 Jan 2009 17:07:07 -0500
 From: Cedric Villani <Cedric.VILLANI@umpa.ens-lyon.fr>
 To: Clement Mouhot
 <clement.mouhot@ceremade.dauphine.fr>
 Subject: bad news

Uite, nu reusesc sa reproduc transferul de regularitate cu estimari la fel de bune ca ale tale (dupa conversia in spatiile cu 3 indici, ceva nu merge acolo). Am reluat calculul tau, si am gasit doua locuri unde nu tine: (a) ultimul indice pe p. 39, 1.8 (inainte de "We use here the trivial estimate") mi se pare ca ar trebui sa fie $\lambda + 2\eta$ mai degraba decat $\lambda + \eta$; (b) mi se pare imposibil ca in ipoteza (5.12) cantitatea estimata sa nu depinda de κ (limitele κ la 0 si κ la infinit schimba spatiul in intregime). Concluzie: mi se pare ca avem o problema...
 Va urma,
 Cedric

Date: Mon, 12 Jan 2009 23:19:27 +0100
 From: Clement Mouhot
 <clement.mouhot@ceremade.dauphine.fr>
 To: Cedric Villani <Cedric.VILLANI@umpa.ens-lyon.fr>
 Subject: Re: bad news

O sa ma uit mai atent maine dupa-amiaza. Dar sunt de acord cu punctul (a), sigur mai sunt si alte probleme cu indicii prin alte parti. Cat despre (b), ce credeam ca pot folosi ca sa afirm ca (5.12) nu depinde de κ (pentru κ intr-un compact), era dependenta slaba in v a campului de scattering $X^{\text{scat}}(s,t)$: cum $\Omega(s,t)$ e apropiat de identitate pana la un $O(t-s)$, avem $X^{\text{scat}}(s,t) = x + O(t-s)$. Nu rezulta ca toate derivatele in v sunt "strivite" in $O(t-s)$?
 pe curand, clement

Date: Sun, 18 Jan 2009 13:12:44 +0100
From: Clement Mouhot
<clement.mouhot@ceremade.dauphine.fr>
To: Cedric Villani <Cedric.VILLANI@umpa.ens-lyon.fr>
Subject: Re: transfer

Salut Cedric,

Fac referat pentru un survey al lui Jabin despre lemele de medie (cursul lui de la Porto Ercole), asa ca am facut niste calcule sa vad legatura cu ale noastre, si am impresia ca in estimarea liniara transferul de regularitate e legat de lemele de medie, dar exprimat in L^1/L^∞ ceea ce pare neobisnuit. De exemplu, daca incercam sa transferam regularitate de la x catre v fara ca diferenta in plus pentru x sa fie proportionala cu $(t-s)$, suntem limitati la o crestere <1 pentru a avea integrabilitate in timp, ceea ce e coerent cu limita $1/2$ in L^2 . O alta noutate in calculele astea pare sa fie ca atunci cand cresterea e proportionala cu $(t-s)$ nu mai exista limita 1... De vazut si daca aceasta crestere proportionala cu $(t-s)$ poate fi utila in teoria regularitatii neliniare (intrebarea ta de la inceput)... Tu ce noutati mai ai?

Cu prietenie,
Clement

Capitolul 11

Princeton, 15 ianuarie 2009

Ca în fiecare dimineață, trec prin sala comună ca să-mi fac un ceai. Aici nu mai întâlnești bonomia lui Einstein, ci trăsăturile tăioase ale lui André Weil, care apare într-un bust în bronz.

Sala comună nu e exuberantă. Are o tablă neagră mare, asta-i de la sine înțeles, ustensile pentru ceai, are table de șah și vrafuri de reviste consacrate jocului de șah.

Una dintre reviste îmi sare-n ochi, e sărbătorit Bobby Fischer, cel mai mare șahist din toate timpurile, mort acum vreun an. Lovit în plin de paranoia, și-a sfârșit viața ca un mizantrop incoerent. Dar, dincolo de nebunie, rămân partidele extraordinare de șah ale unui jucător căruia încă nu i s-a găsit egalul.

În matematică, au fost deja mai mulți cu acest gen de destin tragic.

Paul Erdős, matematicianul rătăcitor, autor a 1500 de articole (record mondial), unul dintre fondatorii teoriei probabile a numerelor, hoinărind prin lume în hainele lui zdrențuite, fără casă, fără familie, fără slujbă, numai cu geanta, valiza, maculatorul și geniul lui.

Grigori Perelman, care și-a petrecut șapte ani în singurătate ca să pătrundă, în secret, misterele faimoasei conjecturi a lui Poincaré, și a uimit apoi lumea matematică oferindu-i o soluție neașteptată despre care se credea că nu e posibilă. Poate pentru a nu strica puritatea acestei soluții a refuzat milionul de dolari oferit de un mecena american și a demisionat de la institut.

Alexander Grothendieck, legendă vie, care a revoluționat în profunzime matematica prin școala de gândire pe care a creat-o, una dintre cele mai abstracte elaborate vreodată. A demisionat de la Institutul de Înalte Studii Științifice și s-a refugiat într-un sătuc din Pirinei, seducător convertit în eremit, pradă nebuniei și maniei scrisului.

Kurt Gödel, cel mai mare logician din toate timpurile, care, spre surpriza generală, a demonstrat că nici o teorie matematică nu e completă și că întotdeauna vor exista enunțuri care nu sunt nici adevărate, nici false. În ultima parte a vieții, mistuit de un complex al persecuției, a sfârșit prin a muri de foame, de teamă să nu fie otrăvit.

Și John Nash, eroul meu matematic, care în zece ani și trei teoreme a revoluționat analiza și geometria, pentru ca apoi să se afunde și el în paranoia.

Se spune că granița dintre geniu și nebunie e îngustă. Dar și unul, și celălalt sunt concepte rău definite. Și-apoi, în cazul lui Grothendieck, al lui Gödel sau al lui Nash, se vede limpede că perioadele de nebunie nu coincid cu perioadele de productivitate matematică.

Ce e înăscut, ce se dobândește – altă dezbatere clasică. Fischer, Grothendieck, Erdős, Perelman erau, cu toții, de origine evreiască. Printre ei, Fischer și Erdős erau, în plus, de origine maghiară. Oricine e familiar cu mediul matematic știe cât de numeroase sunt talentele evreiești din acest domeniu, și nu poate să nu fie uimit de extraordinarul palmares unguresc. Potrivit unei butade la modă în anumite cercuri științifice americane din anii '40, „marțienii există: au o inteligență supraomenească, vorbesc o limbă incomprehensibilă și pretind că vin dintr-un loc numit Ungaria“.

Acestea fiind zise, Nash e american pursânge, fără absolut nimic în ascendența sa pe baza căruia cineva să-i fi putut bănuî destinul. Oricum, un destin depinde de atâtea lucruri! Combinație a ideilor, combinație de experiențe și întâlniri,

combinație genetică – toate participă la minunata și dramatica loterie a vieții. Nici genele, nici mediul nu pot explica totul, și e bine că-i așa.

*

What happens when you gather 200 of the world's most serious scholars, isolate them in a wooden compound, liberate them from all the mundane distractions of university life, and tell them to do their best work? Not much. True, a lot of cutting edge research gets done at the celebrated Institute for Advanced Studies near Princeton. Due to the Institute's remarkable hospitality, there is no better place for an academic to sit and think. Yet the problem, according to many fellows, is that the only thing there is to do at the Institute is sit and think. It would be an understatement to call the IAS an Ivory Tower, for there is no more lofty place. Most world-class academic institutions, even the very serious, have a place where a weary bookworm can get a pint and listen to the jukebox. Not so the IAS. Old hands talk about the salad days of the 40s and 50s when the Institute was party central for Princeton's intellectual elite. John von Neumann invented modern computing, but he is also rumored to have cooked up a collection of mind-numbing cocktails that he liberally distributed at wild fetes. Einstein turns physics on his head, but he also took the occasional turn at the fiddle. Taking their cues from the ancients, the patriarchs of the Institute apparently believed that men (as they would have said) should be well-rounded, engaging in activities high and low, according to the Golden Mean. But now the Apollonian has so overwhelmed the Dionesian at the Institute that, according to many members, even the idea of having a good time is considered only in abstract terms. Walking around the Institute's ground, you might trip over a Nobel laureate or a Fields medalist. Given the generous support of the Institute, you might even become one. But

you can be pretty certain that you won't have a drink and a laugh with either.

(Extras din articolul „DNE, singurul grup rock care a existat vreodată la Institute for Advanced Studies“, de Marshall Poe, Encyclopedia of Memory [DNE=Do Not Erase].)

Capitolul 12

Princeton, 17 ianuarie 2009

Sâmbătă seara, cină în familie.

Ziua a fost consacrată în întregime unei excursii organizate de Institut pentru oaspeții săi. Excursie la sfânta sfintelor pentru toți cei pasionați de istoria Vieții: Muzeul de Istorie Naturală din New York.

Îmi amintesc foarte bine prima mea vizită la acest muzeu, acum exact zece ani. Ce emoție să văd unele dintre cele mai celebre fosile din lume, fosilele reproduse în toate ghidurile și dicționarele de dinozauri pe care le devoram în adolescență!

Astăzi, m-am întors cu zece ani în urmă și mi-am lăsat deoparte grijile matematice. Dar acum, la masă, nu le mai pot uita.

Ușor nedumerită, Claire îmi observă chipul schimonosit de ticuri.

Demonstrația amortizării Landau încă nu stă în picioare. Nu-mi dă pace.

Cum Dumnezeu să facem ca să obținem o descreștere prin transfer de regularitate în poziție, după ce s-au compus vitezele... compunerea asta introduce o dependență de viteze, dar n-am chef de ele, de viteze!

Ce balamuc!

Nu fac conversație, în cel mai bun caz scot câteva cuvinte, în cel mai rău, mormăi.

— Azi a fost frig, ne puteam da cu sania... Ai văzut culoarea steagului de pe lac, azi?

— Hm. Roșu. Așa cred.

Steag roșu: chiar dacă lacul e înghețat, interdicție de plimbare, prea periculos. Steag alb: mergeți, băieți!, gheața ține, săriți, râdeți, dansați pe gheață dacă aveți chef.

Și când te gândești că acceptasem să-mi prezint rezultatele la seminarul de fizică statistică de la Rutgers pe 15 ianuarie! Cum am putut să accept, când n-aveam demonstrația completă? Ce-am să le povestesc?

Și totuși, când am ajuns aici, chiar la începutul lui ianuarie, eram atât de sigur că pot termina proiectul în fix două săptămâni! Noroc că expunerea asta a fost amânată cu încă două săptămâni. Dar chiar și cu amânarea asta, am să fiu gata? Termenul se apropie! Dar cum să-mi fi închipuit că va fi atât de greu, în viața mea n-am văzut așa ceva!

Vitezele-s problema, vitezele! Când nu aveam dependență de viteze, puteam separa variabilele după transformata Fourier, dar cu viteze – cum naiba? Iar de viteze nu scap, în ecuația neliniară, n-am cum să nu le iau în seamă!

— E-n regulă? Totuși, nu e cazul să te-mbolnăvești! Ia-o-n cet, destinde-te.

— Îhî.

— Parcă ești picat din lună.

— Uite ce, am o treabă de făcut, se numește amortizare Landau neliniară.

— Nu trebuia să lucrezi la ecuația lui Boltzmann, nu ăsta era marele tău proiect, nu ți se pare că pierzi din vedere esențialul?

— Mi se fâlfâie. Acum e amortizarea Landau.

Dar amortizarea Landau continuă să facă pe frumoasa inaccesibilă și rece. Nu sunt în stare s-o abordez.

...E, totuși, calculul acela micuț pe care l-am făcut când ne-ntorceam de la muzeu, e dătător de speranțe, nu? Dar ce complicat e! Am mai pus doi parametri la normă. Normele noastre depindeau de cinci indici, era deja un record mondial, acum o să fie șapte!! Dar de ce nu, când cei doi indici sunt

aplicați pe o funcție care nu depinde de viteză, se revine la norma dinainte, e coerent... Trebuie să verific bine calculul ăsta. Dar dacă mă uit prea mult la el acum, o să-mi pară fals, mai bine las pe mâine. Paștele mă-sii, trebuie să refac totul cu blestematele astea de norme cu șapte indici.

Am un aer așa de mohorât, că lui Claire i se face milă de mine, simte că trebuie să spună ceva ca să mă liniștească.

— Hai, lasă, mâine-i duminică, dacă vrei, poți să stai toată ziua la birou, mă ocup eu de plozi.

În momentul ăsta, nimic pe lume nu mi-ar fi făcut mai multă plăcere.

*

Date: Sun, 18 Jan 2009 10:28:01 -0500
From: Cedric Villani <Cedric.VILLANI@umpa.ens-lyon.fr>
To: clement.mouhot@ceremade.dauphine.fr
Subject: Re: transfer

On 01/18/09, 13h12, Clement Mouhot wrote:
> Tu ce vesti ai?

Inaintez... Intai am oscilat, apoi m-am convins ca procedand ca tine nu castigam destul timp. Am gasit o alta metoda care castiga tocmai pe variabila timp, pare sa mearga bine, dar are un defect, face sa apara spatii un pic mai complicate, cu 2 indici in plus :-). Pe de alta parte, toate estimarile par sa functioneze si pentru familia asta noua, dar mai trebuie sa verific bine. In orice caz, sunt chestii ultrafine si cred ca asta-i miezul problemei (sau unul dintre ele). Daca totul merge bine, diseara iti trimit o versiune noua, cu gauri de umplut, ar trebui sa putem reincepe sa tragem in paralel. Numai bine
Cedric

Date: Sun, 18 Jan 2009 17:28:12 -0500
From: Cedric Villani <Cedric.VILLANI@umpa.ens-lyon.fr>
To: clement.mouhot@ceremade.dauphine.fr
Subject: Re: transfer

Uite noua forma a fisierului. Ca sa stea totul in picioare (inca nu vorbesc despre schema lui Newton), trebuie (i) sa verificam ca normele "biihibride" pe care le-am introdus la sfarsitul sectiunii 4 satisfac aceleasi proprietati ca si normele hibride "simple" si ca, in consecinta, avem estimari similare pentru caracteristicile acestor norme (!) (ii) sa gasim un mijloc de a combina cele doua efecte distincte descrise in noua sectiune 5; (iii) sa punem toate astea la sfarsitul sectiunii 7 si sa completam pentru a pune estimarea pentru densitatea completa; (iv) sa verificam tot! Altfel spus, avem o paine de mancat. Deocamdata, as sugera sa verifici ce-am scris si sa-mi spui daca gasesti ceva suspect. O sa-ti spun daca mai incolo vad chestii la care putem trage in paralel...

Inca cateva precizari:

Despre estimarile tale pentru transferul de regularitate: cred ca aveau bug-uri, rezultatul era prea tare, n-am reusit sa le reproduc in normele obisnuite; in schimb am folosit strategia ta ca sa fac un transfer in sectiunea 5. Dar cand incerci s-o folosesti la timp mare ($t \rightarrow \infty$, τ ramanand mic) crapa, asa mi se pare, exponentii autorizati nu dau voie integralei sa convearga in timp. Am fabricat (nu ma intreba cum) o reteta ca sa castigam prin integrarea in timp, dar de data asta fara castig de regularitate. Ramane sa le combinam.

Va urma, numai bine
Cedric

Date: Mon, 19 Jan 2009 00:50:44 -0500
From: Cedric Villani <Cedric.VILLANI@umpa.ens-lyon.fr>

To: clement.mouhot@ceremade.dauphine.fr

Subject: Re: transfer

Am recitit fisierul si am facut un pic de debug, asa ca asta-i versiunea de incredere. Pentru perioada imediat urmatoare, propun urmatoarea impartire a sarcinilor:

- treaba ta e sa faci sa mearga Propozitia 4.17 si Teorema 6.3, e cam bestial, dar are avantajul ca te obliga sa recitesti la virgula toate estimarile mele din sectiunile 4 si 6 :-) ceea ce nu e chiar un lux, pentru ca suntem la mana unei erori de calcul asupra conditiilor pe care trebuie sa le verifice exponentii. Deocamdata, in aceste doua locuri am pus enunturi "nada" cu estimari scrise un pic la nimereala, s-ar putea sa fie cele bune, dar se poate si ca realitatea sa fie mai complicata. Nu e cazul sa redactezi demonstratiile, dar trebuie sa fim siguri de marginile pe care le obtinem, de ele depinde tot restul.

- in timpul asta eu ma angajez sa termin sectiunile 5 si 7 (modulo ce-o sa-mi dai despre Teorema 6.3).

- in plus, o sa discut maine cu Tremaine despre partea fizica a introducerii.

- daca reusesti sa redactezi remarca ta de mai jos, o poti incorpora in introducerea sectiunii 5 unde am mentionat deja legatura cu lemele de medie. (Atentie, cum lucram in clasa analitica, nu e absolut convingator ca asta trebuie sa fie un fenomen L^1/L^∞ ??)

Daca ai timp sa te apuci imediat de astea si daca totul merge bine, am putea sa ne fixam ca obiectiv sa lichidam totul in 2-3 zile si nu ne-ar mai ramane decat sa introducem cum trebuie Newton/Nash-Moser. (Dar cred ca prioritatea e sa

corectam enunturile lui 4.17 si 6.3 ca sa fim siguri
ca nu cladim pe nisip.)

Numai bine,
Cedric

Date: Mon, 19 Jan 2009 13:42:27 +0100
From: Clement Mouhot
<clement.mouhot@ceremade.dauphine.fr>
To: Cedric Villani <Cedric.VILLANI@umpa.ens-lyon.fr>
Subject: Re: transfer

Salut, Cedric
chestia asta devine din ce in ce mai monstruoasa;))!!

*

Extrase din fişierul global-3 (18 ianuarie 2009)

4.7 Byhibrid norms

We shall be led to use the following more complicated norms:

Definition 4.15. We define the space $\mathcal{Z}_{(\tau, \tau')}^{(\lambda, \lambda'), \mu; p}$ by:

$$\|f\|_{\mathcal{Z}_{(\tau, \tau')}^{(\lambda, \lambda'), \mu; p}} = \sum_n \sum_m \frac{1}{n! (n-m)!} \\ \times \left\| (\lambda(\nabla_v + 2i\pi\tau k))^m (\lambda'(\nabla_v + 2i\pi\tau' k))^{n-m} \widehat{g}(k, v) \right\|_{L^p(dv)}.$$

(...)

After trial and error, the best we could do was to recognize this decay in the “bi-hybrid” norms described in Subsection 4.7:

Proposition 5.6 (regularity-to-decay estimate in hybrid spaces).

Let $f = f_l(x, v)$, $g = g_l(x, v)$, and

$$\sigma(t, x) = \int_0^t \int f_\tau(x - v(t - \tau), v) g_\tau(x - v(t - \tau), v) dv d\tau.$$

Then

$$\|\sigma(t)\|_{\mathcal{F}^{\lambda t + \mu}} \leq \left(\frac{C}{\bar{\lambda} - \lambda} \right) \sup_{0 \leq \tau \leq t} \|f_\tau\|_{\mathcal{Z}_\tau^{\bar{\lambda}, \mu; 1}} \sup_{0 \leq \tau \leq t} \|g_\tau\|_{\mathcal{Z}_{(\tau, 0)}^{(\lambda, \bar{\lambda} - \lambda), \mu}}.$$

Capitolul 13

Princeton, 21 ianuarie 2009

Artificiul găsit în seara vizitei la muzeu mi-a permis să pornesc din nou. Iar azi, sunt plin de speranță amestecată cu teamă. În fața unei dificultăți majore, am făcut câteva calcule explicite și am sfârșit prin a înțelege cum să stăpânesc un termen prea mare. În același timp, mă cuprinde amețeala în fața complexității a ceea ce se află în fața mea.

Te pomenești că vajnica ecuație a lui Vlasov, pe care credeam că încep s-o cunosc, funcționează în salturi! Pe hârtie, calculele arată că există anumiți timpi în care reacționează prea repede față de stimuli. N-am auzit niciodată de ceva asemănător, nu apare în articolele sau cărțile pe care le-am citit. Oricum, înaintăm.

*

Date: Wed, 21 Jan 2009 23:44:49 -0500
From: Cedric Villani <Cedric.VILLANI@umpa.ens-lyon.fr>
To: Clement Mouhot <clement.mouhot@ceremade.dauphine.fr>
Subject: !!

Asta-i, dupa ore de jalnica bajbaiala, sunt convins ca am identificat motivul care sterge $O(t)$ -ul de care ma plangeam azi la telefon. E MONSTRUOS!
Se pare ca nu e din pricina estimarilor biliniare, nici a schemei lui Moser, e la nivelul "lemei lui Gronwall" in care estimam ρ in functie de el insusi... poanta e ca avem o chestie de felul
$$u(t) \leq \int_0^t a(s,t)u(s)ds$$

unde $u(t)$ e o margine pentru $\|\rho(t)\|$. Daca $\int_0^t a(s,t)u(s)ds=0(1)$ e in regula. Problema e ca $\int_0^t a(s,t)u(s)ds$ pare sa poata fi egal cu $O(t)$ (adevarul e ca nu avem nici o obstructie, am luat cazurile cele mai perfecte posibil si se poate intampla intotdeauna). Dar cand se intampla asa ceva, e intr-un punct strict interior din $[0,t]$, cam catre mijloc (asta corespunde cazului in care avem k si ℓ astfel incat $0=(k+\ell)/2$); sau la $2/3$ daca avem $0=(2/3)k+\ell/3$ etc. Dar atunci ecuatia recursiva in $u(s)$ arata ca

$$u(t) \leq \text{source} + \epsilon t u(t/2)$$

iar solutiile chestiei asteia nu sunt marginite a priori, ci au crestere lenta! (subexponentiala) Dar cum norma in ρ contine descrestere exponentiala, in final se obtine exact aceasta descrestere.....

Pare un pic monstruos de aranjat toata chestia (in mare, trebuie repertoriate rezonante). E treaba mea de maine. In orice caz, asta nu pune in discutie programul de verificare a normelor hibride.

Numai bine

Cedric

Date: Wed 21 Jan 2009 09:25:21 +0100

From: Clement Mouhot

<clement.mouhot@ceremade.dauphine.fr>

To: Cedric Villani <Cedric.VILLANI@umpa.ens-lyon.fr>

Subject: Re: !!

Chiar ca arata monstruos! Cat despre mine, m-am uitat la partea Nash-Moser si sunt si eu de acord ca e putin probabil sa putem absorbi in ea factorul $t...$ Dimpotriva, daca inteleg bine argumentul marginii lui $u(t)$ trebuie neaparat ca punctul s in care $a(s,t)$ e mare sa ramana in mod uniform la o distanta strict pozitiva de $t...$ Alta chestie e ca am

avea in felul asta o margine subexponentiala in timp pentru rezolvarea problemei neliniare. Si ca s-o topim in norma in ρ ar trebui sa acceptam sa pierdem un pic pe indicele ei, ceea ce cred ca trebuie absolut evitat in partea Nash-Moser...? numai bine, clement

Capitolul 14

Princeton, 28 ianuarie 2009

Beznă! Am nevoie de întuneric, să fiu singur în beznă. Camera copiilor, obloanele trase, e foarte bine. Regularizarea. Schema lui Newton. Constantele exponențiale. Toate mi se bulucesc în minte.

Imediat ce-am adus copiii acasă, m-am refugiat în camera lor ca să continui să-mi pritocesc gândurile. Mâine am expunerea de la Rutgers, și demonstrațiile tot nu stau în picioare. Am nevoie să merg singur ca să pot gândi. Și asta *urgent*!

Claire mi-a mai răbdat și altele fără să crâcnească; totuși, să mă știe învârtindu-mă, singur, într-o cameră în beznă, în timp ce ea pregătește cina, e un pic prea mult.

— E totuși foarte ciudat!!

N-am răspuns, toate canalele mele mentale erau saturate cu gânduri matematice și cu sentimentul urgenței. Am fost totuși să mănânc împreună cu ceilalți, apoi am lucrat toată seara. Un anume calcul, de care eram foarte sigur, nu mai merge, probabil că m-am păcălit. Grav sau nu prea grav?

Mă opresc pe la două dimineața, am impresia că, în fine, totul merge bine.

*

Date: Thu, 29 Jan 2009 02:00:55 -0500
From: Cedric Villani <Cedric.VILLANI@umpa.ens-lyon.fr>
To: Clement Mouhot
<clement.mouhot@ceremade.dauphine.fr>
Subject: global-10

!!!! Cred ca acum am prins firele lipsa.

– Mai intai, am gasit in sfarsit (daca n-am gresit) cum sa facem ca sa pierdem un epsilon oricat de mic vrem (chiar daca pierdem o constanta foarte mare, de tipul exponentiala sau exponentiala la patrat in $1/\epsilon$). Asta iese dintr-un calcul absolut diabolic pe care deocamdata doar l-am schitat la sfarsitul sectiunii 6. Pare complet miraculos dar cade exact cum trebuie, pare convingator.

– Apoi, cred ca am identificat si locurile unde pierdem in caracteristici si scattering. Vom avea de refacut toate calculele din sectiunea asta, chestie care se anunta destul de atroce... Am pus cateva comentarii intr-o subsectiune la sfarsitul acestei sectiuni.

Cu asta, cred ca acum avem toate elementele ca sa alimentam Nash-Moser. Maine, joi, nu-s aici. Uite planul pe care ti-l propun pentru mai departe: o sa refac eu sectiunea 6 cu cresterea subexponentiala, in timpul asta tu pornesti estimarile de scattering care nu-s triste. Ne fixam ca obiectiv sa avem redactat totul la inceputul saptamanii viitoare, cu exceptia ultimei sectiuni. Ce zici?

Numai bine
Cedric

Capitolul 15

New Brunswick, 29 ianuarie 2009

Azi – ziua de care-mi era atât de frică. Sunt invitat la seminarul de fizică statistică de la Universitatea Rutgers, cam la treizeci de kilometri de Princeton. Mă duc cu mașina Eric Carlen și Joel Lebowitz – amândoi locuiesc la Princeton și lucrează la Rutgers.

E a doua mea vizită la Rutgers; prima dată, am fost pentru o zi în memoria lui Kruskal, inventatorul solitonilor, o minte uriașă. Îmi sunt încă proaspete în minte anecdotele povestite de participanți – Kruskal discutând în lift cu doi colaboratori și lăsându-se atât de prins de conversație încât au rămas în lift douăzeci de minute, în timp ce alții intrau și ieșeau din liftul care tot urca și cobora.

Dar azi e mai puțin plăcut! Mă aflu sub tensiune!

De obicei, într-un expozeu științific (un „seminar“) se povestește ceva ce a fost verificat și repetat în detaliu. Asta am făcut întotdeauna. Dar azi nu-i așa: ceea ce voi prezenta nu e pigulit până la capăt, nici demonstrația nu-i completă.

Sigur, aseară m-am convins că totul ține, că mai e doar de scris finalul. Dar azi-dimineață iar m-au cuprins îndoielile. Pentru a se risipi apoi din nou. Încă mă gândesc la ele în mașină.

În timp ce-mi țin prelegerea, sunt sincer convins că totul e-n regulă. Autosugestie? Nu dau prea multe detalii matematice, dar insist pe semnificația problemei și pe interpretarea ei fizică. Le înfățișez faimoasa normă, a cărei complexitate smulge murmurul

publicului. Și asta în condițiile în care m-am mulțumit să prezint versiunea cu cinci indici, nu pe cea cu șapte...

După expunere, mergem în zece la prânz, discuțiile sunt animate. Adineauri, în public era și un tip înalt, dezghețat, cu ochi sclipitori, foarte vesel: Michael Kiessling; acum îmi povestește cu entuziasm comunicativ despre iubirile sale de tinerete pentru fizica plasmei, ecrantaj, ecoul de plasmă, teoria cvasiliniară...



Michael Kiessling

Ecoul de plasmă îmi trezește imediat atenția. Ce experiență frumoasă! Se prepară o plasmă, adică un gaz în care s-au separat electronii de nuclee; e preparată în stare de repaus și, la începutul experienței, repausul este deranjat aplicând un scurt câmp electric, un „impuls“. Apoi se așteaptă până când curențul astfel creat se estompează, după care se aplică un al doilea câmp. Se așteaptă ca și acesta să se estompeze, și-atunci se ivește miracolul: dacă cele două impulsuri sunt bine alese, se observă un răspuns spontan, la un moment precis, răspuns care se numește *ecou*...

Straniu, nu-i așa? Scoți un strigăt (electric) în plasmă, apoi un al doilea strigăt (la o înălțime diferită), iar un pic mai târziu plasma răspunde (la o înălțime diferită de cele două!).

Toate astea-mi aduc aminte de calculele făcute acum câteva zile: o rezonanță în timp... plasma mea care reacționa la anumite momente foarte particulare... credeam că mi-am pierdut capul, dar dacă-i același fenomen al ecourilor, bine-cunoscut în fizica plasmei?

Las asta pe mai târziu. Deocamdată voi sta de vorbă cu profesorii de aici. Așadar, cine mai e în echipă, pe cine ați mai recrutat? Da, sigur, sunt cutare și cutare, e bine...

Unul dintre nume mă face să sar de pe scaun.

— Cum, Vladimir Scheffer e aici?

— Da, sigur, de mult. De ce, îi știi lucrările?

— Evident, am făcut un seminar Bourbaki despre teorema lui celebră de existență a soluțiilor paradoxale ale ecuației lui Euler... Trebuie să-l întâlnesc!

— Păi, nici noi nu-l prea vedem, n-am mai vorbit de mult cu el. Încerc să ți-l găesc după prânz.

Joel a reușit să-l contacteze, și Sheffer vine cu noi în biroul lui Joel.

Nu-mi iese din minte această întrevvedere.

Sheffer a început prin a se scuza îndelung pentru că nu putuse să ajungă mai devreme, ne-a vorbit despre jobul lui care consta în a înăbuși în fașă anumite amenințări juridice la adresa universității – din partea unor studenți nemulțumiți?

După care am discutat în doi matematică, într-o cămăruță, în fața unei table.

— Am făcut un seminar Bourbaki despre lucrările dumneavoastră, v-am printat textul! E în franceză, dar poate că vă e de folos. Explic cu detalii cum teorema dumneavoastră de existență a soluțiilor paradoxale a fost ameliorată și simplificată de Camillo de Lellis și László Székelyhidi.

— Ah, foarte interesant, mulțumesc.

— Aș fi vrut să înțeleg cum v-a venit ideea, cum Dumnezeu v-a venit ideea să construiți soluțiile acelea incredibile?

— Vă explic, e foarte simplu. În teză, arătasem că există obiecte imposibile, lucruri care n-ar trebui să existe în lumea noastră. Uitați care-i metoda.

Desenează câteva cocoase pe tablă și un soi de stea cu patru ramuri. Recunosc figura.

— Da, o știu, e configurația T_4 a lui Tartar!



— A, da? Se poate, habar n-am, oricum făcusem asta ca să construiesc soluții imposibile ale unor ecuații eliptice. Și m-am prins că era o rețetă generală.

— Da, o știu și pe-asta, e integrarea convexă a lui Gromov!

— A, da? Nu, nu cred, ce-am făcut eu e mult mai simplu, construcția merge pur și simplu pentru că suntem în acoperirea convexă și de fiecare dată putem exprima soluția învecinată ca o combinație convexă și-apoi...

În ce-mi explică el, recunosc toate ingredientele acelei teorii numite integrare convexă. Tipul ăsta a regăsit totul de unul singur, fără să aibă habar ce-au făcut alții? Unde a trăit, pe Marte?

— Și atunci, mecanica fluidelor?

— A, da! Așa, într-o zi, asistasem la o expunere a lui Mandelbrot și mi-am zis: mi-ar plăcea să fac și eu chestii de-astea; și m-am apucat să studiez ecuația lui Euler din punct de vedere

fractal și m-am prins că puteam reface același gen de chestii ca în teză. Dar e complicat.

Ascult cu atenție maximă. Dar, după două, trei fraze generale, se întrerupe brusc.

— Acum, îmi pare rău, trebuie să plec acasă, folosesc transportul în comun și zilele astea, cu zăpada, se alunecă ușor și-mi pierde repede echilibrul, am un drum destul de lung de făcut și...

Sfârșitul întrevederii e consacrat evocării tuturor motivelor pentru care trebuie să ne despărțim. Discuția matematică a durat cam cinci minute, timp în care n-am aflat nimic. Și când mă gândesc că în fața mea era omul care stă la originea teoremei celei mai surprinzătoare din toată mecanica fluidelor! Demonstrația vie că poți fi o minte sclipitoare și să comunici jalnic.

Înapoi la Joel, povestesc întrevederea și regret că n-a durat mai mult de cinci minute.

— Păi, știi, Cédric, cinci minute cu Vlad – cam tot atât am putut discuta și eu cu el în ultimii cinci ani.

E momentul să pun deoparte această întrevedere care-mi va rămâne gravată în memorie... mă-ntorc la treburile mele cu amortizarea Landau.

Pe drumul de întoarcere revin și îndoielile.

Dacă mă gândesc bine, demonstrația n-o să meargă.

Seminarul de la Rutgers marchează un moment-cheie în căutările mele. Să anunți rezultate care nu sunt încă demonstrate e o greșală gravă, o ruptură a contractului de încredere care leagă oratorul de public. Pentru ca greșeala să nu fie enormă, sunt cu spatele la zid, trebuie cu orice preț să demonstrez ce-am anunțat.

Se zice că John Nash, eroul meu matematic, obișnuia să se pună sub o presiune incredibilă anunțând rezultate pe care încă nu le demonstrase. În orice caz, așa a făcut cu teorema de scufundare izometrică.

După seminarul de la Rutgers, simt și eu ceva din presiunea asta. Sentimentul ăsta de urgență n-o să mă mai părăsească în lunile următoare. Dacă nu completez demonstrația asta, sunt dezonorat!!

*

Închipuiți-vă că vă plimbați prin pădure într-o după-amiază liniștită de vară, vă opriți lângă un lac, totul e calm, nici o adiere de vânt.

Dintr-odată, suprafața apei e prinsă de convulsii, se-agită în vârtejuri formidabile.

Și-apoi, după doar un minut, totul s-a domolit din nou. Ia-răși nici o adiere de vânt, nici un pește în lac. Ce s-a întâmplat?

Paradoxul Scheffer-Schnirelman, cu siguranță rezultatul cel mai surprinzător din toată mecanica fluidelor, arată că o asemenea monstruozitate e posibilă, cel puțin în lumea matematică.

Nu se bazează pe vreun model exotic, pe probabilități cuantice, energie întunecată sau mai știu eu ce. Se sprijină pe ecuația lui Euler incompresibilă, mama tuturor ecuațiilor cu derivate parțiale, modelul acceptat de toți, matematicieni și fizicieni deopotrivă, pentru descrierea fluidului perfect incompresibil, fără frecări interne.

Sunt peste 250 de ani de când s-a născut ecuația lui Euler și tot nu i-au fost pătrunse toate misterele. Mai rău: ecuația lui Euler e considerată una dintre cele mai înșelătoare din lume. Când Institutul Clay a scos la concurs șapte probleme de matematică, pentru un premiu de un milion de dolari fiecare, a avut grijă să includă regularitatea soluțiilor lui Navier-Stokes, dar a evitat, precaut, ecuația lui Euler, și mai monstruoasă.

Și totuși, la prima vedere, ecuația lui Euler pare așa de simplă, așa de inocentă – îngerul păzitor al mecanicii fluidelor. Nici n-ai nevoie să modelezi variațiile de densitate ori

să înțelegi misterioasa vâscozitate, e de-ajuns să scrii legile de conservare: conservarea masei, conservarea impulsului, conservarea energiei.

Și iată că în 1993 Scheffer arată că ecuația lui Euler în plan permite o creație spontană de energie! Să crezi energie din nimic! Niciodată nu s-au văzut fluide care să nască în natură asemenea monstruozități! E clar că ecuația lui Euler ne mai rezervă încă surprize de proporții.

Demonstrația lui Scheffer era un tur de forță de virtuozitate matematică, era pe cât de obscură pe atât de dificilă. Nu cred că, în afară de autorul ei, a mai citit-o cineva în detaliu și sunt sigur că nimeni n-ar fi în stare s-o reproducă.

În 1997, matematicianul rus Alexander Schnirelman, faimos pentru originalitatea lui, producea o nouă demonstrație pentru acest rezultat surprinzător. Și, puțin mai târziu, propunea impunerea unui criteriu ecuației lui Euler, unul realist din punct de vedere fizic, care să interzică comportamentele patologice.

Nici vorbă! Acum câțiva ani, doi străluciți tineri matematicieni, italianul De Lellis și ungurul Székelyhidi, demonstrau o teoremă generală, încă și mai șocantă, și, printre altele, arătau de ce criteriul lui Schnirelman nu putea rezolva paradoxul. În plus, folosind tehnici de integrare convexă, propuneau o metodă nouă pentru generarea acelor soluții monstruoase, un procedeu limpede care se înscria pe o cale explorată deja de numeroși cercetători: Vladimir Šverák, Stefan Müller, Berndt Kirshheim... Și-uite-așa, cu De Lellis și Székelyhidi descoperim că știm și mai puțin decât credeam despre ecuația lui Euler.

Și asta nu era totul.

Extras din seminarul Bourbaki ținut de mine în 2008

Teoremă (Scheffer 1993, Schnirelman, 1997). *Există o soluție slabă nenulă a ecuației lui Euler incompresibile în dimensiune 2,*

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \nabla \cdot (v \otimes v) + \nabla p = f, \quad \nabla \cdot v = 0,$$

fără forșaj ($f \equiv 0$), cu suport compact în spațiul-timp.

Teoremă (De Lellis și Székelyhidi 2007, 2008). *Fie Ω un deschis din \mathbb{R}^n , $T > 0$, și e o funcție uniform continuă $\Omega \times]0, T[\rightarrow]0, +\infty[$, cu $e \in L^\infty(]0, T[; L^1(\Omega))$. Atunci, pentru orice $\eta > 0$, există o soluție slabă (v, p) a ecuației lui Euler fără forșaj ($f \equiv 0$), astfel încât*

$$(i) \ v \in C(\mathbb{R}; L_w^2(\mathbb{R}^n))^n;$$

$$(ii) \ v(x, t) = 0 \text{ dacă } (x, t) \notin \Omega \times]0, T[; \text{ în particular } v(\cdot, 0) = v(\cdot, T) \equiv 0;$$

$$(iii) \ \frac{|v(x, t)|^2}{2} = - \frac{n}{2} p(x, t) = \bar{e}(x, t) \text{ pentru orice } t \in]0, T[$$

și pentru aproape orice $x \in \Omega$;

$$(iv) \ \sup_{0 \leq t \leq T} \|v(\cdot, t)\|_{H^{-1}(\mathbb{R}^n)} \leq \eta.$$

În plus,

$$(v) \ (v, p) = \lim_{k \rightarrow \infty} (v_k, p_k) \text{ în } L^2(dx dt),$$

unde fiecare (v_k, p_k) e o pereche de funcții C^∞ cu suport compact, soluție clasică a ecuației lui Euler cu un forșaj $f_k \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}; \mathbb{R}^n)$ bine ales, $f_k \rightarrow 0$ în sensul distribuțiilor.

Capitolul 16

Princeton, 25 februarie 2009

Liniștită mai e viața la Princeton! Pădurea, veverițele cenușii, lacul, bicicleta.

Și bucătăria bună! Ieri ne-au dat un file de pește-spadă la grătar, fraged și bine aseasonat, o supă cremă de dovleac ca la mama acasă, la desert – cremă de ciocolată cu mure și frișcă...

Abia îți revii după masa de prânz, că s-a și făcut ora trei: momentul ceaiului în venerabilul Fuld Hall, la intrarea în IAS, plus degustare de prăjiturile de casă – altele în fiecare zi. Mă omor mai ales după madlene, nu sunt cu nimic mai prejos decât cele pe care le pregăteam pentru vecinii și vecinele de la internat acum cincisprezece ani.

E drept că stau slab cu pâinea, imposibil de găsit la Princeton o baghetă crocantă; dar lacuna cea mai flagrantă la nivelul produselor de primă necesitate, cea din pricina căreia suferă toată familia, e calitatea jalnică a brânzeturilor! Unde-s Comté-ul cu aromă de fructe, brânza de capră din Rove, Échourgnac-ul parfumat, Brillat-Savarin-urile cremoase? Unde să găsești aici fragedele Navette și picantele Olivia provenșale, indestructibilele Mimolette de Lille?

Luna asta am fost pentru scurt timp pe Coasta de Vest, la Berkeley, pentru o vizită fulger la Mathematical Sciences Research Institute – prescurtat MSRI – liderul mondial al institutelor care organizează întâlniri între matematicieni. Eram emoționat să revăd orașul acesta în care locuisem cinci luni în 2004!

Și, bineînțeles, n-am ratat o escapadă la Cheeseboard, locul meu preferat din Berkeley, o cooperativă care produce brânză pe principii socialiste care se potrivesc bine cu legenda locală și unde poți găsi o selecție de brânzeturi care fac de rușine mulți producători francezi.

La Cheeseboard mi-am făcut plinul, am găsit și Rove, știam că puștii o să se arunce hulpavi pe ea. Le-am mărturisit vânzătorilor cât sufăr de lipsa brânzeturilor în New Jersey; m-au îndemnat stăruitor să fac o vizită la Murrays, la New York. Fie!

În Franța, echivalentul lui Mathematical Sciences Research Institute este Institutul Henri Poincaré, IHP pentru apropiați, fondat în 1928 mulțumită a doi mecena, Rockefeller și Rothschild. Sunt deja două luni de când consiliul de administrație al IHP m-a ridicat la rangul de director al acestui institut – în unanimitate, mi s-a spus. Dar încă n-am acceptat, am pus o serie de condiții și ca să cântăresc bine – asta cere timp, mult timp.

Prima oară mi-au vorbit despre acest post de director acum patru luni. După ce-a trecut momentul de surpriză, mi-am zis că ar fi o experiență interesantă și-am acceptat să candidez. Nu le-am spus nimic colegilor de la ENS Lyon, de teamă să nu-i supăr... De ce să accept un post de director de institut după ce-am refuzat unul de director de laborator? De ce să plec la Paris, când m-am dezvoltat la Lyon? Și-apoi, în zilele noastre, cine-și dorește să fie directorul unui laborator științific, copleșit de sarcini administrative, cocoșat de regulile pe an ce trece mai constrângătoare?

Ce naivitate să cred că e posibil să nu aflu nimeni de candidatura mea! Nu în Franța... Colegii lyonezi au aflat imediat și nu le venea să creadă. Era atât de illogic, un cercetător de vârsta mea gândindu-se la un post despre care se știa că e foarte dificil, așa încât și-au spus că le ascund ceva, că în spațele candidaturii se afla vreun secret personal.

Nici un secret, nu, doar o dorință sinceră de a accepta provocarea. Dar numai în condiții bune! Or, veștile nu sunt prea

încurajatoare, în Franța, discuțiile par să se fi împotmolit... Așadar: debarcare la Paris, ori întoarcere la Lyon?

Poate că nici una, nici alta. Cu sau fără brânză, viața de-aici e foarte plăcută și mi-au propus să mai stau un an la Princeton, chiar mai mult, dacă mă simt bine, în condiții financiare și materiale excelente. În plus, Claire și-a reluat munca în cercetare, are mare succes la cursurile doctorale de științe ale Pământului de la Universitatea Princeton, unde s-a integrat într-o echipă ce lucrează la o nouă descoperire extraordinară – ar putea fi vorba despre cele mai vechi fosile de animal cunoscute! Directorul echipei o roagă să se lanseze într-un stagiu postdoctoral. În orice caz, venind cu mine la Princeton, și-a pierdut postul de profesor de liceu din Lyon și-acum e prea târziu ca să mai participe la viitoarea repartizare a profesorilor: toate astea nu-i prea dau ghes să se întoarcă. Pentru ea, a rămâne aici ar fi cu siguranță mai simplu și i-ar aduce mai multe satisfacții.

În condițiile astea, e greu de rezistat sirenelor princetoniene. Sigur, nu se pune problema să mă instalez definitiv într-o țară atât de înapoiată în privința calității pâinii... dar câțiva ani, de ce nu? La urma urmei, treaba lor dacă nu-s în stare să-mi facă o propunere bună la Paris!

Toate astea se învârtesc și se amestecă în capul meu de câteva săptămâni deja, și exact în noaptea asta m-am hotărât să trimit un e-mail în Franța ca să declin oferta de la IHP.

Dimineața însă, când mi-am deschis poșta electronică, lovitură de teatru: gata, toate condițiile mi-au fost acceptate! OK pentru completarea de salariu, OK pentru reducerea normei didactice, OK pentru prelungirea bursei personale. Toate astea par rutină în Statele Unite, dar pentru Franța e un *deal* extraordinar. Lângă mine, Claire citește atentă propunerea.

— Dacă le fac pe toate cum trebuie, ești obligat să te-ntorci.

A dat glas gândului meu. Mă voi întoarce în Franța la sfârșitul lui iunie; ne vom lua la revedere de la Princeton!

Va trebui să-i anunț pe noii mei colegi americani că nu voi rămâne cu ei. Unii se vor bucura pentru mine (baftă, Cédric, va fi pasionant!), alții se vor arăta îngrijorați (te-ai gândit bine, Cédric?, să conduci un asemenea institut – gata cu cercetarea ta), iar alții vor fi îngrozitor de vexați (ca acel celebrisim cercetător de la Princeton care nu va mai vorbi cu mine timp de trei luni). Relațiile mele diplomatice vor deveni și mai complicate, atât în Statele Unite, cât și în Franța.

În toiul confuziei, o certitudine: cel mai important din tot ce mi se întâmplă e articolul la care lucrez cu Clément.

*

Situat în campusul Pierre și Marie Curie, Institutul Henri Poincaré (IHP), „Casa Matematicii și a Fizicii teoretice“, a fost fondat în 1928 pentru a scoate matematica franceză din izolarea în care se afla pe-atunci; a devenit rapid un centru important al învățământului științific și al culturii franceze. Einstein a predat aici relativitate generală, și tot aici Volterra a introdus în Franța analiza matematică a biologiei. IHP a adăpostit și primul institut francez de statistică, primul proiect francez pentru un calculator. Chiar și artiștii au frecventat IHP: suprarealiștilor le plăcea să-și caute aici inspirația, după cum atestă fotografii și pânze ale lui Man Ray.

După ce Universitatea din Paris l-a folosit în anii '50 și '60 ca loc pentru educația matematică, în anii '70, IHP a căzut în desuetudine, renovat fiind și refondat la începutul anilor '90, când a primit actuala sa formă: deopotrivă școală internă a Universității Pierre și Marie Curie (UPMC) și instrument al politicii științifice naționale, susținut de Centrul Național pentru Cercetări Științifice (CNRS). Managementul oferit de o foarte mare universitate pune IHP la adăpost de neplăcerile hazardului și îi asigură continuitatea printr-o importantă echipă (tehnică și administrativă) pe care un institut de mărimea lui nu și-ar putea-o permite. Susținerea CNRS îi

aduce mijloace suplimentare și îi permite să beneficieze de o rețea națională de competențe.

IHP îndeplinește funcțiuni multiple: teren al schimburilor științifice naționale și internaționale, el găzduiește programe tematice, cursuri doctorale de nivel înalt și nenumărate colocvii și seminarii. Are un rol federator pentru universitățile franceze și servește drept ambasadă a matematicilor franceze în societate. Bogăția vieții științifice pariziene întreține în localurile IHP un furnicar matematic fără pereche la scena internațională. Consiliul de administrație al IHP, ales, în parte, prin scrutin național, cuprinde reprezentanți ai multor instituții științifice franceze; consiliul științific, complet independent, e format din personalități științifice de prim rang. Localurile sale istorice, biblioteca de referință, expertiza în invitarea cercetătorilor străini, parteneriatul strâns cu societățile savante și cu alte asociații dedicate matematicii sunt tot atâtea elemente care contribuie la faima sa.

Extras dintr-o notă de sinteză despre Institutul Henri Poincaré (C. Villani, septembrie 2010).

Capitolul 17

Princeton, 25 februarie 2009, după-amiază

Copiii s-au întors de la școală, clădesc cabane în grădină și urmăresc veverițele...

La celălalt capăt al firului, Clément e mai puțin senin.

— Stratificarea estimărilor permite rezolvarea unora dintre problemele pe care le evocam... dar tot rămân o mulțime!

— Bun, oricum, avansăm.

— M-am uitat atent pe Alinhac-Gérard, e o problemă mare la estimări: ar trebui un pic de marjă de regularitate pentru a avea convergența la zero a termenului de regularizare, și-n plus regularizarea ar putea omori gratis convergența biexponențială a schemei.

— Mda, n-am băgat de seamă. Ești sigur că se pierde rata de convergență în metoda Newton? OK, găsim noi ceva.

— Iar constantele de regularizare în analitic sunt monstruoase!

— Da, bine, constantele astea exponențiale sunt cu adevărat îngrijorătoare, dar o scoatem cumva la capăt și cu ele, eu sunt încrezător.

— Și-apoi, oricum, constantele astea o să explodeze prea repede ca să poată fi omorâte de convergența schemei Newton! Pentru că trebuie regularizat *background*-ul ca să gestionăm eroarea introdusă de funcția b , în inversul timpului, dar e o constantă, și constanta asta trebuie să permită controlul normelor care vin din *scattering*... or, normele astea cresc pe parcursul schemei, pentru că vrem pierderi sumabile în λ !

— OK, ai dreptate, sunt de acord că încă nu se vede limpede ce trebuie făcut. Dar sunt încrezător, o să iasă!

— Stai puțin, tu chiar mai crezi că ne iese prin regularizare?

— Păi, da, astea-s detalii tehnice, dar, orișicât, una peste alta am avansat al naibii de mult! Am înțeles chestia cu rezonanța și ecoul de plasmă, am înțeles principiul de *time cheating*, avem estimări bune pentru *scattering*, avem normele bune, e-aproape gata!

În ziua aceea, Clément m-o fi luat drept un optimist patologic, unul nebun de legat, care continuă să spere împotriva tuturor evidențelor, când nu se mai vede nici o scăpare. Noul impas pare îngrozitor, dar eu încă mai sper. Trebuie spus că în ultimele trei săptămâni am fost deja de trei ori în impas, și de fiecare dată am reușit să găsim o ieșire de siguranță. E drept și că obstacolele care păreau depășite au reapărut ca să-și rădă de noi sub o formă diferită... E clar, amortizarea Landau neliniară e Hidra din Lerna! Dar în ziua aceea, împotriva a tot și a toate, eram convins că nimic n-avea să ne oprească. *Ini-ma-mi va birui fără opreliști.**

*

Date: Mon, 2 Feb 2009 19:40:04 +0100

Subject: Re: global -10

From: Clement Mouhot

<clement.mouhot@ceremade.dauphine.fr>

To: Cedric Villani <Cedric.VILLANI@umpa.ens-lyon.fr>

Uite cateva observatii:

— pentru normele cu doua shifturi, deocamdata nu-mi pierde speranta, ma uit in amanunt la scattering ca sa vad daca estimarile pe care le am sunt suficiente ca sa-l trec in normele cu doua shifturi,

* *Mon cœur vaincra sans coup férir*, ultimul vers din poezia *Spioana* de Guillaume Apollinaire. (N. t.)

– ok sectiunea 5, intr-adevar merge uns transferul de regularitate + castigul in descrestere, e o chestie tare draguta! Daca inteleg bine, aportul partii "castig in descrestere" este de a reporta "grosul" decalajului in shift pe doar una dintre functii (asa devine un decalaj intre cele doua shifturi ale normei cu doua shifturi), sperand ca aplicand asta pentru campul creat de densitate n-o sa doara prea tare?

– despre sectiunea 6, ok pentru ideea generala si pentru calcule, dar (1) mai degraba n-as suma seriile in k si l pt ca coeficientii nu mi se par sumabili (nu-i grav), (2) pentru a putea lua epsilon mai mic in ipotezele teor. 6.3, mi se pare ca ne trebuie si c mic, se verifica mai departe? Urmeaza alte observatii... numai bine, clement

Date: Sun, 8 Feb 2009 23:48:32 -0500

From: Cedric Villani <Cedric.VILLANI@umpa.ens-lyon.fr>

To: Clement Mouhot

<clement.mouhot@ceremade.dauphine.fr>

Subject: news

Iata, doua vesti bune:

– lectura articolelor despre ecoul de plasma arata ca acest fenomen e provocat exact de aceleasi "rezonante" care ne dau atat de furca in sectiunea 6. De fapt, am fost cu atat mai uimit cu cat ele utilizeaza notatii aproape identice, cu un τ ... Asta-mi intareste convingerea ca pericolul identificat in sectiunea 6 e fizic semnificativ, pe scurt, ar fi vorba sa stim daca ECOURILE AUTOCONSISTENTE din plasma se vor acumula pentru a distruge treptat dampingul.

– cred ca am gasit calea buna de a trata termenul $\ell=0$ pe care-l lasasem "provizoriu" deoparte in sectiunea 5 (in σ_0 din Teorema 5.8: il estimam ca pe ceilalti, dar pastram toti termenii si folosim faptul ca $\int f(t,x,v) dx = O(1)$ la timp mare (sau mai degraba $\int \nabla_v f(t,x,v) dx = O(1)$) Asta NU E o consecinta a estimarii noastre pentru $f(t,x,v)$ in norma alunecatoare, e o estimare in plus. Pentru o solutie a transportului liber, $\int f(t,x,v) dx$ se pastreaza in cursul timpului, deci e perfect rezonabil. Cand se adauga scatteringul, n-o sa mai fie $O(1)$, ci $O(t^{-\tau})$ sau ceva asemanator, si-atunci asta va fi omorata de descresterea exponentiala in t/τ pe care o pastrasem in versiunea precedenta a Teoremei 5.8.

Schimarile pe care le-am facut in versiunea atasata:

- * schimbari in sectiunile 1 si 2 ca sa explicam bine articolele alea despre ecoul de plasma (nu pricepusem ca lumea care era experienta si probabil ca toti matematicienii au trecut pe langa importanta majora a chestiei asteia, aici cred ca suntem la kilometri inaintea celorlalti)
- * adaugat o subsectiune la sfarsitul sectiunii 4, pentru a preciza care sunt normele in timp cu care vom lucra; mentionez povestea cu regularizarea prin medie spatiala, care de altfel e coerenta cu sursele indicate de Kiessling
- * schimbari in sectiunea 5 pentru a tine cont de felul cum tratam termenul $\ell=0$
- * adaugat o referinta pentru ecoul de plasma

O CONSECINTA IMPORTANTA e ca in sectiunea 8 va trebui nu doar sa propagam regularitatea

alunecatoare asupra lui f , ci sa propagam si regularitatea (in v) uniform (in t) asupra lui $\int f dx$

N-am schimbat nimic in sectiunea 7, dar, asa cum probabil ai inteles, ceea ce pusesem in sectiunea 7.4 "Imbunatatiri" e perimat, in sensul ca scrisesem partea asta inainte de a fi inteles ca tocmai diferenta $(\lambda \tau + \mu) - (\lambda' \tau' + \mu')$, sau ceva foarte asemanator, trebuie sa conteze cu adevarat.

N-am schimbat nici sectiunea 8, dar scrisesem o groaza de chestii care sunt tot caduce despre "zero mode" al lui f_τ .

Tu ce noutati ai? Acum totul se sprijina pe sectiunea 7.

Numai bine

Cedric

Date: Sat, 14 Feb 2009 17:35:28 +0100

Subject: Re: global -18 final

From: Clement Mouhot

<clement.mouhot@ceremade.dauphine.fr>

To: Cedric Villani <Cedric.VILLANI@umpa.ens-lyon.fr>

Uite versiunea 19 cu o versiune completa a enunturilor teoremelor 7.1 si 7.3 de scattering in norma hibrida cu unul si doua shifturi. Se pare (uf!) ca teorema de compunere cu doua shifturi din sectiunea 4 ajunge pentru demonstratie. Pare sa mearga, dar trebuie sa verifici bine, versiunea cu doua shifturi e inca de groaza. Inca n-am integrat corectia Sobolev, dar punctul asta e cu siguranta mai putin periculos. Dar am schimbat o chestie (inclusiv in teorema cu un shift): estimarile pentru pierderile de indici si de amplitudine sunt acum nu doar uniforme, ci tind la 0 si $\tau \rightarrow \infty$, cum e nevoie in sectiunea 8. Iar pierderile astea

sunt in $O(t^{-\tau})$ pentru $(t^{-\tau})$ mic. Maine ma apuc din nou, ca sa adaug corectia Sobolev si sa completez sectiunea 8 conform sectiunii 7.

Numai bine, clement

Date: Fri, 20 Feb 2009 18:05:36 +0100

Subject: Re: Versiunea 20 in lucru

From: Clement Mouhot

<clement.mouhot@ceremade.dauphine.fr>

To: Cedric Villani <Cedric.VILLANI@umpa.ens-lyon.fr>

Uite versiunea 20, tot in lucru, cu teorema stratificata cu doua shifturi completa. Acum avem o problema de fond fata de teorema 5.9: b nu poate sa tinda la 0 in timpul schemei Nash-Moser in rezultatele astea (cum pretinde teorema 5.9) pentru ca serveste la corectarea unui termen de eroare datorat chiar scatteringului, care nu tinde la zero pentru ca e legat de camp... Ma uit acum atent la teorema 5.9.

numai bine,

clement

Capitolul 18

Princeton, 27 februarie 2009

Azi e o mică sărbătoare la Institut: un colocviu de ecuații cu derivate parțiale geometrice. Casting excelent, multe vedete: toți vorbitorii avuți în vedere au acceptat onoarea de a veni să conferențieze la Princeton.

Stau în picioare, în fundul sălii de conferințe, în spatele biroului transformat în pupitru de regie. E locul cel mai bun, i l-am suflat lui Peter Sarnak, unul dintre profesorii permanenți ai Institutului. Aici sunt sigur că rămân complet treaz și pot și să-mi întind foile pe birou, pe când cei care stau pe scaune, mai puțin protejați împotriva picoteli, trebuie să se mulțumească doar cu o măsuță.

În timp ce ascult conferențiarul, mă plimb prin sală în șosete. Ideal pentru activarea ideilor.

În pauză, tot în șosete, alerg la birou, la etaj. Telefon lui Clément.

— Clément, ai văzut mesajul meu de ieri și noul fișier?

— Schema cea nouă pe care o obții scriind întâi formulele caracteristicilor? Da, am prins șmecheria, am început să scriu calculele, dar pare monstruos.

E clar: cuvântul „monstruos” revine întruna în conversațiile noastre...

— Presimt probleme de convergență, reia Clément. Mă tem și pentru schema lui Newton, și pentru termenii de eroare din liniarizare. Și-apoi, mai e o chestie mai tehnică, anume că în toate cazurile vei avea *scattering*-ul din etapa precedentă – care nu-i mic!

Mă simt vexat că nu l-a convins ideea mea genială.

— OK, o să vedem, dacă nu merge – asta e, rămânem la schema actuală.

— Oricum, ți se cam ia, am scris deja peste o sută de pagini de demonstrație, și tot nu ne iese!! Tu chiar crezi c-o facem?

— Ia-o-ncet, ia-o-ncet, suntem pe-aproape...

Jos, s-a terminat pauza, cobor în grabă să prind continuarea colocviului.

*

Ecuatiile cu derivate parțiale (EDP) sunt relații între ratele de variație ale anumitor cantități în funcție de diferenți parametri. Este unul dintre domeniile cele mai dinamice și variate ale științelor matematice, care sfidează orice încercare de unificare. EDP-urile se regăsesc în toate fenomenele fizicii mediilor continue și se referă la toate stările materiei: gaze, fluide, solide, plasmă; precum și la toate teoriile fizice: clasică, relativistă, cuantică...

Dar ecuațiile cu derivate parțiale apar și în spatele multor probleme geometrice; vorbim atunci despre EDP-uri geometrice. Ele permit deformarea unor obiecte geometrice conform unor legi bine determinate. În domeniul acesta, se aplică unei probleme de geometrie un mod de gândire analitic: amestec de genuri devenit din ce în ce mai frecvent în cursul secolului XX.

Colocviul din februarie 2009 de la Princeton aborda trei teme principale: geometriile conforme (schimbări ale geometriei care distorsionează distanțele, dar păstrează unghiurile); transportul optimal (cum să transporti masa de la o configurație inițială la una finală prescrisă, cheltuind minimum posibil de energie); și probleme de frontieră liberă (în care se caută forma frontierei care separă două stări ale materiei sau două materiale). Trei domenii care țin în egală măsură de geometrie, de analiză și de fizică.

În anii '50, John Nash bulversase echilibrul dintre geometrie și analiză când descoperise că problema geometrică abstractă a scufundării izometrice putea fi rezolvată cu tehnici de decorticare fină a ecuațiilor cu derivate parțiale.

Acum câțiva ani, pentru a rezolva conjectura lui Poincaré, Grigori Perelman a folosit o EDP geometrică, numită curent Ricci, inventată de Richard Hamilton. Rezolvarea asta analitică a unei probleme emblematice de geometrie a bulversat din nou echilibrul dintre discipline și a provocat un avânt fără precedent al EDP-urilor geometrice. Bomba lui Perelman răsună ca un ecou al celei lansate de Nash, la cincizeci de ani distanță.

Capitolul 19

Princeton, 1 martie 2009

Neîncrezător, citesc și recitesc mesajul care tocmai mi-a apărut pe ecranul calculatorului.

Clément are un plan nou? Nu mai vrea să facă regularizarea? Nu mai vrea să recâștige pierderea de regularitate codificată în decalajul în timp?

De unde scoate una ca asta? De mai multe luni ne-am pus în cap să facem să meargă o schemă Newton cu regularizare, ca în Nash-Moser; iar acum Clément zice că ne trebuie o schemă Newton fără regularizare!? Și zice că trebuie să estimăm de-a lungul traiectoriilor, păstrând timpul inițial și timpul final, cu *două timpuri* diferite?

La urma urmei, de ce nu? Dar orișicât! Cédric, atenție mare, tinerii sunt redutabili, începi deja să fii depășit!

OK, e ineluctabil, tinerii sfârșesc oricum prin a învinge... dar... de pe-acum?

Să lăsăm văicăreala pe mai târziu, acum ar trebui să înțeleg ce-a vrut să spună. Până la urmă, ce e chestia asta cu estimările, de ce ar trebui să păstrăm memoria timpului inițial?

În cele din urmă, Clément și cu mine ne vom fi împărțit foarte bine găselnițele din proiectul ăsta: la mine, normele, estimările de deflexie, descreșterea în timp mare și ecourile; la el, *time cheating*-ul, stratificarea erorilor, estimările cu două timpuri și procedeul fără regularizare. Și-apoi, e ideea normelor alunecătoare, născută dintr-o ședință de lucru în comun, și care nu știm cui i se datorează cu adevărat... Asta fără să mai vorbim despre sutele de mici artificii de calcul.

Și, dacă mă gândesc bine, nici nu e atât de rău că am luat-o pe căi diferite în mijlocul proiectului: timp de o lună sau două, fiecare a fost acaparat de propria idee și a rămas surd la argumentele celuilalt, dar acum amândoi am înțeles că e cazul să împreunăm cele două puncte de vedere.

În orice caz, dacă Clément are dreptate, sare și ultimul mare lacăt conceptual. În duminica asta de 1 martie, întreprinderea noastră intră într-o fază nouă, mai searbădă, dar mai sigură. Schema de ansamblu e gata, căutările în toate direcțiile au luat sfârșit. De-acum, trebuie să consolidăm, să întărim, să verificăm, să verificăm, să verificăm... E momentul să punem la lucru toată puterea noastră de foc în analiză!

Mult mai târziu, Clément îmi va mărturisi că, în acel week-end, se hotărâse să oprească totul. Sâmbătă dimineață scrisese un mesaj sinistru: „Am pierdut orice speranță... obstacolele tehnice sunt insurmontabile... nu văd nici o pistă... abandonez.“ Dar a dat înapoi în momentul trimiterii, voia să caute cuvinte cu care să mă convingă și să mă consoleze, așa că a pus mesajul deoparte. Pe seară, când l-a reluat, înarmat cu creion și hârtie ca să-și aducă aminte piste de infructuoase, a văzut uimit care e tactica bună. A doua zi, treaz de la 6 dimineața, după câteva ore de somn agitat, a scris din nou totul ca să pună pe curat ideea-cheie care avea să ne scoată din impas.

În ziua aceea am trecut la milimetru pe lângă abandonarea proiectului. Mai multe luni de muncă erau cât pe ce să dispară – în cel mai bun caz, la frigider; în cel mai rău caz, în fum.

Iar eu, de partea cealaltă a Atlanticului, nici nu bănuiam că trecusem pe lângă catastrofă, tot ce vedeam era entuziasmul care răzbătea din mesajul lui Clément.

Măine trebuie să am grijă de copii, din cauza furtunii de zăpadă nu se face școală. Dar imediat după aceea, păzea!, problema nu mai are șanse. Îl iau pe Landau cu mine peste tot, în pădure, pe plajă, în pat, o să fie de groază.

În februarie 2009, am schimbat cu Clément cam 100 de mesaje; în martie vor fi peste 200.

*

Date: Sun, 1 Mar 2009 19:28:25 +0100
 Subject: Re: global -27
 From: Clement Mouhot
 <clement.mouhot@ceremade.dauphine.fr>
 To: Cedric Villani <Cedric.VILLANI@umpa.ens-lyon.fr>

Eventual o speranta pe alta cale: sa nu regularizam, ci sa incercam sa propagam norma cu un shift de care avem nevoie la fcr etapa a schemei, dar de-a lungul caracteristicilor etapei precedente. Deci am estima la rangul n in ordinea (nu scriu de fiecare data pierderile sumabile in λ si μ):

- 1) norma F a densitatii ρ_n de indice $\lambda t + \mu$
 - 2) norma Z a distrib h_n de indice λ , μ si t
 - 3) norma C a mediei spatiale $\langle h_n \rangle$ de indice λ
 - 4) norma Z la timpul τ cu un shift $-b/(1+b)$ de-a lungul caracteristicilor (complete) $S_{\{t, \tau\}}$ de ordin $n-1$. Derivam in τ ca sa obtinem o ecuatie pentru $H_{\tau} = h^n_{\tau} \circ S_{\{t, \tau\}}^{n-1}$ de tipul (nu mai pun eventualele semne minus)
- $$\partial_{\tau} H = (F[h^n] \cdot \nabla^{n-1}) \circ S_{\{t, \tau\}}^{n-1} + (F[h^{n-1}] \cdot \nabla h^{n-1}) \circ S_{\{t, \tau\}}^{n-1}$$

Asadar, in mare in ecuatie asta nu mai apare deloc campul, si tot membrul drept e tratat ca un termen sursa, folosind marginile de la 1) asupra densitatii: Se estimeaza norma Z cu shiftul b : pe densitate tratam eroarea comisa din cauza caracteristicilor cu acest shift (pentru ca norma e proiectata pe x), iar pentru ceilalti termeni folosim ipoteza de recurenta de la punctul precedent pentru a margini normele care apar.

- 5) Acum ne trebuie o margine (in norma shiftata) pentru $f^n \circ S_{\{t, \tau\}}^n$ (cu caracteristicile de la ordinul n), folosind marginea din ipoteza de recurenta (in norma shiftata) asupra lui

$f^{n-1} \circ S_{\{t,\tau\}^{n-1}}$. Multumita punctului 4) de mai sus, prin adunare obtinem o margine pentru $f^n \circ S_{\{t,\tau\}^{n-1}}$. Apoi trebuie folosit faptul ca putem margini $f^n \circ S_{\{t,\tau\}^n}$ (caracteristici de la pasul n) in functie de $f^n \circ S_{\{t,\tau\}^{n-1}}$ (caracteristici de la pasul $n-1$) modulo o pierdere, sumabila cand n tinde la infinit.

In rezumat ideea generala ar fi:

– Ca sa estimam densitatea, nu avem de ales, ne trebuie caracteristici si o norma shiftata (cu un shift de ordinul 1) pentru distributia de la pasul precedent, de-a lungul caracteristicilor de la pasul precedent,

– Dar, odata ce avem marginea pentru caracteristici, putem lucra de-a lungul caracteristicilor si in norma shiftata, pentru ca, proiectate pe densitate, aceste doua fenomene se anuleaza.

Dimpotriva, in tot ce-am spus deja am lasat deoparte gradientul in v pe background, care nu comuta cu compunerea cu caracteristicile, dar putem spera ca exista ceva de genul norma shiftata a lui $(\nabla_v f^{n-1}) \circ S_{\{t,\tau\}^{n-1}}$ mai mic decat constanta ori norma shiftata a lui $\nabla_v (f^{n-1}) \circ S_{\{t,\tau\}^{n-1}}$...

Daca esti pe-acolo, am putea discuta la tel sunt acasa inca o ora: cred ca asta se potriveste destul de bine cu schema ta, cu diferenta ca disting fundamental doua etape si privesc lucrurile de-a lungul caracteristicilor doar intr-un al doilea timp.

Numai bine, Clement

Date: Mon, 2 Mar 2009 12:34:51 +0100

Subject: Versiunea 29

From: Clement Mouhot

<clement.mouhot@ceremade.dauphine.fr>

To: Cedric Villani <Cedric.VILLANI@umpa.ens-lyon.fr>

Iata versiunea 29 in care am incercat sa aplic strategia despre care iti povesteam ieri: apare in sectiunea 9 despre stabilitatea liniara, pe care am rescris-o complet, si in subsectiunile 11.5 si 11.6 din sectiunea despre schema Newton, in care am pus liniile mari ale studiului de convergenta. Daca nu e vreo greseala babana, incep sa cred ca ne apropiem de potou!!

Capitolul 20

Princeton, 11 martie 2009

Tocmai m-am întors de la savuroasa cantină. Conversație plină de antren, de matematică și de bârfe.

Azi, în fața mea stătea Peter Sarnak; eu l-am orientat către Paul Cohen, îndrumătorul lui de teză, cel care a demonstrat indecidabilitatea ipotezei continuumului înainte de a se întoarce spre alte orizonturi matematice, cel pentru care tânărul Peter, în căutarea frisonului cercetării, și-a părăsit Africa de Sud natală. Cu entuziasmul său bineștiut, Peter l-a evocat pe Cohen și gustul lui pentru demonstrarea problemelor *ab nihilo*, fără să se sprijine pe lucrările altora.



Peter Sarnak

- Cohen nu credea în matematica incrementală!
- Incrementală?
- Da, credea că matematica progresează prin salturi bruște. Tu și cu mine, la fel ca mulți alții, progresăm mai ales ameliorând

alte lucrări, nu și Cohen! N-aveai voie să-i vorbești despre îmbunătățiri, te lua la goană. Nu credea decât în revoluții.

Întotdeauna e o plăcere să stai lângă Peter. La masă mai era și tânărul meu vecin de birou, Emanuel Milman, israelian, tânără stea în urcare a geometriei corpurilor convexe. Cu tată, bunic și unchi matematicieni, Emanuel tocmai a devenit tată. Al unui viitor matematician? În orice caz, vorbește despre minunatul său pui cu tot atâta entuziasm ca despre speranțele sale matematice.

Alături de Emanuel, stătea Sergiu Klainerman, fugit din România comunistă în anii '70. Sergiu a devenit o celebritate mondială când a demonstrat, împreună cu formidabilul matematician grec Demetrios Christodoulou, un rezultat fundamental al relativității generale, într-o demonstrație fluviu de 500 de pagini. Îmi place grozav să stau de vorbă cu Sergiu despre matematică, despre politică și ecologie – toate, subiecte asupra cărora sensibilitățile noastre diverg adesea.

Și-apoi, conversația era așa de animată la masa noastră datorită lui Joel Lebowitz, care, în ciuda celor optzeci de ani bătuți pe muchie, încă debordează de energie. Pe Joel îl interesează totul, Joel vrea să știe tot și, dacă e cuplat la fizica statistică, domeniul său preferat, atunci e de neoprit.



Joel Lebowitz

Profit de prezența lui Joel și-l rog să-i explice lui Emanuel problema tranziției de fază într-un gaz format din sfere dure. Problemă simplă de formulat, fundamentală și care sfidează

de o jumătate de veac imaginația întregii comunități a fizicii statistice.

La urma urmei, nu e inadmisibil că în 2009 încă nu știm să explicăm misterul schimbării de stare: de ce un lichid se preface în gaz atunci când e încălzit, de ce se preface în solid când e răcit? Cine știe, un tânăr ca Emanuel ar putea avea o idee nouă...

După pauza de prânz, îmi revin în minte toate problemele. Sunt de rezolvat tot soiul de chestiuni administrative cu Institutul Henri Poincaré sau, mai degrabă, cu afilierea mea lyoneză pe care aș vrea să mi-o păstrez în timpul mandatului de director. Marele meu complice, Alain Guionnet, îmi apără interesele în laborator, dar totul e atât de complicat... Și am de pregătit o serie de seminarii și, mai ales, amortizarea Landau încă nu stă în picioare! În ultimele zece zile, Clément și cu mine am redactat versiuni noi ale articolului; ultima poartă numărul 36 și numără 130 de pagini. Am reperat și reparat o mulțime de greșeli, am adăugat o secțiune extrem de instructivă de contraexemple, colegul meu lyonez Francis Filbet ne-a furnizat imagini minunate de amortizare Landau obținute cu calculatorul. Dar mai sunt atâtea de făcut! Așa că mintea mea face recapitularea în surdină: *trebuie rafinate estimările pentru caracteristici și trebuie trecut supremumul în interiorul normei, să ne concentrăm pe @!*\# de interacțiuni coulombiene, să adăugăm un indice de corecție de regularitate Sobolev cam peste tot (șapte indici, porca miseria!), să păstrăm stratificarea în exponențială de-a lungul schemei Newton, să facem să meargă recurența aia enormă...*

Dar neobositul Joel mă trage într-o ședință de lucru împreună cu un alt coleg francez și simt cum mă cuprinde deznadejdea. Sunt atâtea lucruri asupra cărora ar trebui să mă concentrez, și iată că au trecut mai multe zile în care am lucrat până la două noaptea... în torpoarea după-amiezilor, abia dacă-s în stare să-mi adun ideile. Imposibil să-l refuz pe Joel,

dar, văzând că ședința de lucru se prelungește, clachez și optez pentru un subterfugiu mârșav: îi părăsesc anunțând că trebuie să iau copiii de la școală (de fapt, azi îi ia Claire); apoi aștept ca ei să meargă să lucreze în altă sală, revin discret în biroul meu, mă întind pe jos, adorm și-mi las creierul frământat să-și pună gândurile în ordine.

Treaz, mă reapuc imediat de lucru.

*

Paul Cohen, tânăr coleg și rival ambițios al lui Nash la Princeton, e una dintre mințile cele mai creative ale secolului XX. Cel mai mare titlu de glorie al său e soluția ipotezei continuumului, cunoscută și drept problema cardinalului intermediar. Enigma aceasta, care făcea parte din lista de 23 de probleme-far enunțate de Hilbert în 1900, era considerată, în epocă, drept una dintre cele mai importante din matematică; e clar că rezolvarea ei i-a adus medalia Fields, în 1966.

Am nevoie de un mic ocol pentru a explica ipoteza continuumului. Numerele întregi (1, 2, 3, 4, ...) sunt în număr infinit, evident. La fel și numerele fracționare (1/2, 3/5, 4/27, 53417843/14366532, ...) Numerele fracționare par să fie mai multe decât cele întregi, dar e doar o iluzie: fracțiile se pot enumera, de exemplu:

1, 1/2, 2/1 (=2), 1/3, 3, 1/4, 2/3, 3/2, 4, 1/5, 5, 1/6, 2/5, 3/4, 4/3, 5/2, 6...

și așa mai departe, crescând câte puțin suma (numărător+numitor) – așa cum explică foarte bine Ivar Ekeland în povestirea atât de amuzantă Pisica în ținutul numerelor. Așadar, nu sunt mai multe numere fracționare decât numere întregi, ci sunt exact la fel de multe.

În schimb, dacă ne uităm la numerele reale, acelea care se scriu cu o infinitate de zecimale (sunt și limitele de numere fracționare), atunci un argument magnific al lui Cantor arată că acestea sunt mult mai multe, e imposibil să fie numărate.

Avem deci o cantitate infinită de numere întregi și o cantitate infinită și mai mare de numere reale. Există oare un infinit care să fie mai mare decât infinitul întregilor și mai mic decât infinitul numerelor reale?

Generații de logicieni și-au rupt dinții în problema asta, unii încercând să demonstreze că da, acest infinit există, alții, dimpotrivă, că nu, nu există așa ceva.

Paul Cohen nu era specialist în logică, dar credea în puterea minții sale. Într-o zi, s-a apucat de această problemă și, spre stupoarea generală, a demonstrat că răspunsul nu e nici da, nici nu. Există o lume matematică cu un infinit intermediar, există și o lume matematică fără un infinit intermediar, și rămâne ca noi s-o alegem pe cea pe care o vrem. Amândouă sunt corecte, dar care din ele e mai naturală este o problemă viu dezbătută de specialiștii în teoria mulțimilor.

*

Joel Lebowitz e papa fizicii statistice, știința care caută să descopere proprietățile sistemelor constituite dintr-un număr mare de particule. Gaz format din miliarde de miliarde de molecule, populații biologice formate din milioane de indivizi, galaxii formate din sute de miliarde de stele, rețele cristaline formate din miliarde de miliarde de atomi... sunt multe problemele care țin de fizica statistică! Și, de aproape șaizeci de ani, Joel își pune energia inepuizabilă în slujba pasiunii sale, lucrând fără oprire împreună cu colegi matematicieni și fizicieni. Cu două sesiuni pe an de mai bine de o jumătate de veac, seria de colocvii pe care a organizat-o e, cu siguranță, cea mai veche și cea mai alimentată dintre toate seriile organizate de un cercetător activ.

Născut în Cehoslovacia acum peste optzeci de ani, Joel a avut o viață plină – cu amintiri bune și rele deopotrivă. Pe antebrațul său e tatuat un număr, despre asta nu vorbește niciodată. În orice adunare, Joel e primul la râs și la băut, ca

și la discuțiile despre fizica statistică, bineînțeles, pe toate ariile și pe orice tonalitate. Ar trebui să măsurăm energia oamenilor în mili-Joeli, în miimi de Joel, spunea râzând unul dintre colegi: o miime din energia lui Joel e deja bine. Sau poate chiar un pico-Joel, dacă e să fim drepți.

*

Date: Mon, 9 Mar 2009 21:42:10 -0500
 From: Francis FILBET <filbet@math.univ-lyon1.fr>
 To: Cedric Villani <Cedric.VILLANI@umpa.ens-lyon.fr>
 Cc: Clement Mouhot
 <clement.mouhot@ceremade.dauphine.fr>

Hello

Iata rezultatele din weekend. Filmulete, nu-i mare lucru (nu se compara cu un Desplechin): in partea de simul numerica a particulelor incarcate.

<http://math.univ-lyon1.fr/~filbet/publication.html>

E cazul plasmei. Inca n-am schimbat semnul pentru cazul gravit, dar ma mira foarte tare ce spui. Cred ca e nevoie de un fond neutralizant pentru a pastra un potential periodic i.e. $\int_0^L E(t,x)dx=0$ cand ai cond la limita periodice

Date: Mon, 9 Mar 2009 22:11:10 +0100
 From: Cedric Villani <Cedric.VILLANI@umpa.ens-lyon.fr>
 To: Francis FILBET <filbet@math.univ-lyon1.fr>
 Cc: Cedric Villani <Cedric.VILLANI@umpa.ens-lyon.fr>, Clement Mouhot <clement.mouhot@ceremade.dauphine.fr>

Imaginile sunt magnifice! E emotionant sa vezi "de-adevaratele" efectele ecuatiilor la care am lucrat "abstract"...

Cedric

Capitolul 21

Princeton, 13 martie 2009

Închid ușa camerei copiilor, fetița încă mai chicotește în pat cu gândul la aventurile lui Goofy, eroul poveștii imaginare a zilei. *Dormiți, minunății miciuțe, mâine-i o nouă zi.**

Tot în pat, Claire profită de ultima ocazie de a-și aduce aminte cunoștințele de japoneză, înaintea plecării pe teren cu colegii geologi, mâine în zori. E momentul cel mai bun să mă apuc de lucru. Îmi fac un ceai, îmi întind notele. Încă un munte de probleme tehnice pe care-l nivelăm sistematic, Clément și cu mine.

Partea cea mai lungă din demonstrație, secțiunea 9, e abia în curs de construcție. E nenorocitul ăsta de control al modului zero, eram sigur că avea să-mi scoată peri albi. Și, peste zece zile, trebuie să fac o expunere cu rezultatul ăsta! Zece zile minuscule ca să fac să funcționeze totul.

*

Date: Fri, 13 Mar 2009 21:18:58 +0100
From: Cedric Villani <Cedric.VILLANI@umpa.ens-lyon.fr>
To: Clement Mouhot
<clement.mouhot@ceremade.dauphine.fr>
Subject: 38!

* Vers din *Berceuse paternelle*, de Jacques Prévert: „Dormez petites merveilles, il fera jour demain.“ (N. t.)

Atasat, versiunea 38. Cu modificarile:

- 2-3 erori de scriere corectate ici colo pe care le poti vedea cu diff daca e cazul
- sectiunea 9 e acum completa modulo un anumit numar de formule, e momentul sa fii curajos si sa duci calculele la capat! E destul de frumos cand vezi cum se leaga toate ingredientele ca sa duca la rezultat. Organizarea acestei sectiuni justifica a posteriori planul de ansamblu al articolului (in particular punerea caracteristicilor la inceput). Cateva recitiri ar trebui sa fie de-ajuns ca sectiunea sa fie OK, iar apoi va fi pregatita pentru alegerea constantelor (Fiti binevenite, calcule!)
- am taiat masiv din toate vechile comentarii, in special din cele legate de regularizare.
- dar tot mai sunt doua gauri legate de mediile spatiale!

* prima e in legatura cu necesitatea de a stratifica estimarile asupra lui $\langle \nabla h^k \rangle$ (sectiunea 9.4). E delicat, asa cum explic in fisier, nu te poti sprijini pe recurenta, dar nici pe regularitate pentru ca $\langle \cdot \rangle$ e foarte putin regulat. Singura solutie pe care o vad e utilizarea regularitatii Sobolev aditionale a caracteristicilor, care se propaga uniform in n . Atentie, avem nevoie de regularitatea in viteza, dar ar trebui sa fie OK, regularitatea Sobolev a fortei conduce la regularitate in toate variabilele. Trebuie sa castigam exact o derivata, ceea ce inseamna ca si aici Coulomb e critic...

* al doilea e tratamentul modului de ordin 0 in estimarile din sectiunea 6, unde deocamdata nu merge (constante prea mari ca sa mai fie verificat criteriul de stabilitate). Sunt destul de optimist, cred ca-mi voi recicla vechea mea idee de a folosi schimbarea de variabile in scattering si estimarile asupra caracteristicilor DIRECTE. Cand am facut acele incercari, n-am avut in minte ordinea de marime buna, inca nu stratificasem, pe scurt eram mult mai putin inarmati.

Propun urmatoarea impartire: mai intai, tu te ocupi sa faci sa convearga sectiunea 9 lasand deoparte cele doua gauri de mai sus; apoi te ocupi de aranjarea primei gauri. In timpul asta, eu vad de gaura a doua. A priori, nu pun mana pe fisierul tex in zilele urmatoare.

Pentru cazul coulombian: mai vedem noi, cred ca prioritatea e umplerea gaurilor.

O sa am o saptamana mai grea pentru ca o sa am singur grija de copii, in plus sunt si invitati in lab. Dar e aproape sprintul final.

Numai bine,
Cedric

Capitolul 22

Princeton, noaptea de 15 spre 16 martie 2009

Așezat direct pe mochetă, înconjurat de foile cu note mângălite, scriu, tastez cu o exaltare febrilă.

Azi, duminică, am avut grijă să nu fac matematică în timpul zilei, am început prin a duce copiii la un *brunch* la Alice Chang în compania multor nume mari de matematicieni. Profesor la Universitatea din Princeton, conferențiar plenar la Congresul Internațional al Matematicienilor acum câțiva ani, Alice Chang e o specialistă recunoscută în analiza geometrică; ea e cea care m-a invitat la IAS ca să particip la programul pe care-l organizează anul acesta.



Alice Chang

Azi-dimineață, în timpul *brunch*-ului, s-a discutat un pic despre tot, de exemplu, despre faimosul clasament Shanghai,

clasamentul tuturor universităților din lume, care acaparează atenția mediilor și politicienilor francezi. Când am abordat subiectul cu Alice, mă întrebam cum avea să reacționeze, ea care e profesor în unul dintre departamentele de matematică cele mai celebre din lume, dar și chinezoaică. Avea să se arate mândră de importanța pe care a căpătat-o acest clasament chinezesc? Reacția ei m-a dezumflat.

— Cédric, ce-i aia clasament Shanghai?

Când i-am explicat despre ce e vorba, m-a privit de parcă eram căzut în cap.

— Cédric, nu pricep, în *Franța* se consideră un punct de onoare să fii în clasamentul ăsta *chinezesc*?

(Coco, nu crezi că inversezi rolurile?) Tare mi-ar plăcea să le-o prezint pe Alice colegilor francezi care se ocupă de politică!

În fine, abia seara, târziu, după ce am culcat copiii, m-am apucat de lucru. Și – miracol! –, totul pare să se lege ca prin minune. Tremur tot în timp ce redactez ultimele 6 sau 7 pagini care, sunt convins, vor marca finalul demonstrației, cel puțin pentru interacțiuni mai regulate decât interacțiunile coulombiene. Sunt multe capcane, dar nici una nu pare de neocolit.

Merg la culcare la două și jumătate, dar mintea mi-e atât de agitată că rămân treaz încă multă, multă vreme, cu ochii larg deschiși.

Adorm la trei și jumătate.

La patru, mă trezește fi-miu, a făcut pipi în pat. Nu i se mai întâmplase de ani buni, trebuia să se întâmple taman în noaptea asta...

Asta-i viața, mergem înainte, schimb cearșafurile, în fine, tot tacâmul.

Sunt nopți când toate conspiră ca să nu te lase să dormi. Puțin îmi pasă!

Orice matematician demn de acest nume a simțit, chiar dacă numai arareori, starea de exaltare lucidă în care un gând urmează altuia ca prin miracol... Spre deosebire de plăcerea sexuală, sentimentul acesta poate dura ore și chiar zile întregi.

André Weil

Capitolul 23

Princeton, 22 martie 2009

Până la urmă, soluția mea tot greșită era, ne-a trebuit mai bine de o săptămână ca să ne lămurim. Cea mai mare parte a demonstrației stătea în picioare, dar blestematul de mod nul încă ne chinuia... însă, oricum, eram pe-aproape!

De când e în Taiwan, unde a început să prezinte public lucrările noastre, Clément mi-a digerat ideile și le-a încorporat ideilor lui, gătindu-le în sos propriu; apoi am reluat eu totul în stilul meu.

Acum, totul e mult mai simplu decât primul aluat și merge! A trecut un an de când lucrăm la demonstrația asta și, pentru prima dată, chiar pare să funcționeze.

Ar fi și timpul: peste două zile, anunț rezultatul la Princeton...

*

Date: Sun, 22 Mar 2009 12:04:36 +0800
Subject: Re: finisari
From: Clement Mouhot
<clement.mouhot@ceremade.dauphine.fr>
To: Cedric Villani <Cedric.VILLANI@umpa.ens-lyon.fr>

Gata, cred c-am inteles ce-aveai in cap pentru media in spatiu!! Si cred ca trebuie combinat cu ideea pe care ti-am spus-o la tel (de fapt cele doua sunt complementare), uite care-i planul:

(1) Cred ca acel calcul la care te gandeai pentru a folosi regularitatea mai buna si stratificata

a backgroundului e calculul de la paginile 65-66 la inceputul sectiunii 6: in cazul asta (fara scattering) chiar putem folosi "gratis" marja de regularitate pe background pentru a crea crestere (independent de nivelul de regularitate pe campul de forta).

(2) Trebuie atunci sa ne reducem la cazul asta cu ideea despre care ti-am spus la tel ("restul" despre care vorbeam nu-i nul, trebuie tratat cu (1)):

a. inlocuim

$F[h^{n+1}](t, \tau) \circ \Omega^n(t, \tau) \circ S^0(\tau, t)$ cu $F[h^{n+1}](t, \tau) \circ S^0(\tau, t)$, restul are descrestere buna in timp datorita estimarilor pe $\Omega^n - Id$.

b. acum punem in practica ideea de a face o schimbare de variabila pentru a inlocui Ω^n cu Ω^k in $\nabla_v f^n$ (pentru orice k intre 1 si n): scapam de probl care apare cu aplicatia Λ pentru ca acum nu mai compunem Ω^n X cu $\Omega^{-1} \circ \Omega^k$, ci avem doar $\Omega^{-1} \circ \Omega^k$, pentru care avem deja estimari.

c. scapam din nou de aplicatia

$\Omega^{-1} \circ \Omega^k$ pe care am mutat-o pe $F[h^{n+1}]$ cu acelasi truc de la etapa a., ceea ce creeaza un nou term cu restul amabil care descreste bine in timp,
>> si ramanem cu

$\sum_{k=1}^n \int_0^t \int_v F[h^{n+1}] \cdot (\nabla_v^k \circ \Omega^k) (x - v(t - \tau), v) > \int_\tau^t dv$

d. abia acum permutam gradientul in v cu compunerea cu scatteringul:

$\langle (\nabla_v f^n) \circ \Omega^k \rangle = \nabla_v (\langle f^n \circ \Omega^k \rangle)$
 + rest cu descreștere bună în τ

>> așa ca ne mai ramane

$\sum_{k=1}^n \int_0^t \int_v F[h^{n+1}](x-v(t-\tau), v) \, \nabla_v U_k(v) \, d\tau \, dv$

cu funcțiile $U_k(v)$ de regularitate λ_k, μ_k

e. ajunsi aici, aplicam în sfârșit calculul (1) pentru fiecare k , ceea ce ar trebui să dea o estimare stratificată uniformă.

Spune-mi cum ți se pare și dacă ajungi la aceleași calcule...

Numai bine, Clement

Capitolul 24

Princeton, 29 martie 2009

Primul seminar la Princeton. În fața unor colegi titrați, precuși și mai ales în fața lui Elliott Lieb, cordial, dar implacabil.

Între timp, Clément e la Taipei, unde expune și el rezultatele noastre. Douăsprezece ore de decalaj orar, configurația optimă ca să lucrezi eficient! Ne și împărțim lumea: el răspândește cuvântul cel bun în Asia, eu în Statele Unite.

De data asta merge bine, cu totul altă situație decât la seminarul meu șovăielnic de la Rutgers, demonstrația e corectă cel puțin 90%, și toate ingredientele majore sunt clare; mă simt sigur pe mine, gata să răspund întrebărilor și să explic demonstrația.

Deși rezultatele își fac micul lor efect, Elliott nu e convins de ipoteza condițiilor la limită periodice, pe care o consideră aberantă.

— Dacă nu e adevărat în tot spațiul, atunci n-are sens!

— Elliott, în tot spațiul ai contraexemple, ești obligat să pui limite!

— Dar ar trebui ca rezultatul să fie independent de limite, altfel nu-i fizică!

— Elliott, chiar și Landau îl făcea cu condiții la limită, și a demonstrat că rezultatul depinde foarte tare de limite, o să-mi spui că nici el nu era fizician?

— Dar n-are nici un sens!

În ziua aia, Elliott era pe cai mari. Mai e și Greg Hammett, fizician la Princeton Plasma Physics Laboratory, PPPL, căruia

îi cade greu ipoteza mea de stabilitate în cazul plasmelor, prea tare ca să fie realistă.

Dacă mă așteptasem la o primire triumfală, am cam dat-o-n bară!

*

Elliott Lieb e unul dintre cei mai celebri și redutabili specialiști în fizica matematică. Membru al laboratoarelor de matematică și de fizică de la Universitatea din Princeton, și-a consacrat o parte din viață cercetărilor legate de stabilitatea materiei: ce obligă atomii să se adune, în loc să stea liniștiți și separați unul de altul? De ce suntem ființe coerente, în loc să ne dizolvăm în universul înconjurător? În termeni matematici, problema fusese pusă și defrișată de Freeman Dyson, fizician emblematic al secolului XX, acum profesor emerit la IAS; a transmis virusul și altora mai tineri, ca Elliott Lieb.

Scufundat cu totul în cercetările astea, Elliott s-a dus să caute soluția în fizică, în analiză, în calculul energiilor. A luat cu sine o mulțime de cercetători, a creat școli de gândire. Pe drum, a cules dovezi spectaculoase, pepite care au schimbat fața analizei matematice.

Pentru Elliott, nimic nu valorează mai mult în înțelegerea unei probleme decât o inegalitate bună. O inegalitate exprimă dominarea unui termen asupra altuia într-o ecuație, a unei forțe asupra alteia, a unei entități asupra alteia. Elliott a îmbunătățit profund anumite inegalități celebre: inegalitățile Hardy-Littlewood-Sobolev, inegalitățile lui Young, inegalitățile Hausdorff-Young; în plus, a dat numele unor inegalități fundamentale, ca inegalitățile Lieb-Thirring sau inegalitățile Brascamp-Lieb, folosite acum de mulți cercetători din toată lumea.

La aproape 80 de ani, Elliott e încă activ. Silueta sa ireproșabilă reflectă o igienă de viață impecabilă, comentariile lui

acide sunt temute de toți. Fața i se luminează când vorbește despre Japonia, despre inegalități sau despre bucătăria rafinată (care în japoneză înseamnă și analiză matematică).



Elliott Lieb

Capitolul 25

Princeton, 1 aprilie 2009

1 aprilie, ziua păcălelilor!

Azi, ne-am uitat cu toții la un episod din *Lady Oscar*. Maria-Antoaneta, Axel de Fersen și Oscar de Jarjayes au tot făcut piruete printre mari sentimente în timp ce se pregătea Revoluția Franceză.

Iar seara, înainte de culcare, o ascultăm pe Gribouille* pe YouTube, *Roza și marinarul*. Ce minune! Are și Internetul părți bune.

În săptămâna care a trecut, am înțeles o mulțime de lucruri în timpul expunerilor pe care le-am făcut despre amortizarea Landau.

După prima expunere, odată domolită iritarea, Elliott mi-a făcut comentarii valabile despre dificultatea conceptuală asociată modelului coulombian periodic.

La a doua expunere, am anunțat principalele idei de fizică din demonstrație. Lui Elliott i-a plăcut amestecul de matematică și fizică, s-a arătat binevoitor și interesat.

La a treia expunere, am găsit soluția criticii lui Hammett și am putut anunța ipoteze aproape optimale asupra condiției de stabilitate și asupra lungimii perturbării.

* Marie-France Gaîté (1941–1968), al cărei nume de scenă era Gribouille, a fost o cântăreață franceză descoperită de Jean Cocteau și asemuită cu Edith Piaf. (*N. t.*)

Am prezentat rezultate calde și coapte doar pe jumătate, dar strategia a fost câștigătoare: criticile îmi vor permite să avansez cu viteză considerabilă! Încă o dată, a trebuit să mă pun într-o poziție vulnerabilă ca să câștig putere.

Și... în sfârșit, am înțeles legătura cu K.A.M.!

Tocmai legăturile ascunse între diferite domenii ale matematicii mi-au făcut reputația de cercetător. Legăturile astea sunt atât de prețioase! Ele îți permit să arunci o lumină asupra unuia sau altuia dintre domeniile implicate, ca într-un joc de ping-pong în care fiecare descoperire pe un mal conduce la o alta pe celălalt mal.

La 24 de ani, împreună cu colaboratorul meu italian Giuseppe Toscani: primul meu rezultat important, legătura dintre producția de entropie Boltzmann, ecuația Fokker-Planck și producția de entropie a plasmiei.

Doi ani mai târziu, împreună cu colaboratorul meu german Felix Otto: legătura ascunsă dintre inegalitatea lui Sobolev logaritmă și inegalitatea de concentrare a lui Talagrand. De-atunci au mai fost propuse și alte demonstrații... Lucrarea asta a fost lansarea mea în aventurile din domeniul transportului optimal; mulțumită ei, am fost invitat să țin un curs la nivel de cercetare la Atlanta, din care s-a născut prima mea carte.

La susținerea tezei, Yves Meyer îmi spusese: *În teza dumneavoastră sunt relații, inegalități miraculoase! Acum douăzeci de ani, lumea și-ar fi bătut joc de lucrarea asta, nu credeau în miracole!* Dar eu cred, și am de gând să mai produc încă.

În teză, îmi recunoșteam patru părinți spirituali – îndrumătorul meu, Pierre-Louis Lions, tutorele Yann Brenier, apoi Eric Carlen și Michel Ledoux, ale căror lucrări le devorasem, cele care mi-au deschis larg porțile lumii Inegalităților. Sintetizasem aceste patru influențe, dar adăugasem și alte elemente pentru a-mi crea propriul stil matematic, care a evoluat în funcție de următoarele întâlniri.

La trei ani de la susținere, împreună cu colaboratorul meu statornic Laurent Desvillettes, am descoperit o legătură improbabilă între inegalitatea lui Korn din teoria elasticității și producția de entropie Boltzmann.

Imediat după aceea, dezvoltam teoria hipocoercivității, bazată pe o nouă analogie între problematica regularizării și cea a convergenței către echilibru, pentru ecuațiile cu derivate parțiale disipative și degenerate.

A urmat legătura ascunsă dintre transportul optimal și inegalitățile Sobolev pe care am scos-o la lumină împreună cu Dario Cordero-Erausquin și Bruno Nazaret; o legătură care a stupefiat o mulțime de analiști convinși că stăpânesc la perfecție acele inegalități!

În 2004, ca profesor invitat la Institutul Miller din Berkeley, l-am întâlnit pe colaboratorul meu american Joel Lott, invitat al Mathematical Sciences Research Institute; împreună, am arătat cum se pot utiliza idei din transportul optimal, provenite din economie, pentru a aborda probleme de geometrie neeuclidiană în lipsa netezimii, problema zisă „a curburii Ricci sintetice“. Teoria rezultată, numită uneori Lott-Sturm-Villani, a zgâlțâit câteva ziduri dintre analiză și geometrie.

În 2007, bănuind o armonie ascunsă, am ghicit o relație tare între geometria locului de tăiere tangent și condițiile de curbură necesare pentru regularitatea transportului optimal; o legătură care pare să iasă de niciunde și pe care am demonstrat-o împreună cu Grégoire Loeper.

De fiecare dată, totul e declanșat de o întâlnire. De parc-aș fi un catalizator! Și-n plus, o credință fermă în căutarea armoniilor preexistente – la urma urmei, Newton, Kepler și atâția alții au dat exemplul. Lumea e plină de legături nebănuite!



Iar nimeni în lume nu bănuia
C-au fost legați prin destin
Marinarul din Formoza
Și roza din Dublin

Și doar în tăcerea fără sfârșit...

Cum nimeni nu bănuia că ar fi vreo legătură între amortizarea Landau și teorema lui Kolmogorov.

De fapt, nu chiar nimeni, Étienne Ghys a bănuțit ceva, vrăjit sau păcălit de cine știe ce spirit malițios. Un an după discuția aceea, am toate cărțile în mână, și acum înțeleg care-i legătura!

— Hmmm... O pierdere de regularitate într-un context perturbativ, datorată unor fenomene de rezonanță, e compensată de o schemă Newton care exploatează caracterul complet integrabil al sistemului perturbat...

Puteam să caut mult și bine! Cine și-ar fi imaginat o chestie atât de îmbârligată? Dar mai întâi de toate, cine-ar fi crezut că amortizarea Landau e, în fond, o chestiune de regularitate?!

Marinarul și roza (Huard)

*Au fost odat' o roză
Și-un marinar străin
Marinarul era în Formoza
Roza era în Dublin*

*Nu s-au văzut niciodat'
Depărtarea era de vină
El nu pășea pe uscat
Ea nu ieșea din grădină*

*Deasupra rozei celei cuminți
Treceau des pășări în zbor
Și primăveri, și sori fiebinți
Și tot veneau nor după nor*

*Deasupra marinului rătăcitor
Pluteau tot aceleași vise:
Primăveri, sori, nor după nor
Și pășări cu-aripi larg deschise*

*Dar în septembrie marinarul muri
Și tocmai în ziua aceea, ușor
Roza-ncepu a se-ofili
Lângă o fată bolnavă de dor*

*Iar nimeni în lume nu bănuia
C-au fost legați prin destin
Marinarul din Formoza
Și roza din Dublin*

*Și doar în tăcerea fără sfârșit
Un înger frumos ca un fulger
Când soarele-ajunge la asfințit
Aruncă pe mare petale din cer.*

Capitolul 26

Princeton, noaptea de 8 spre 9 aprilie 2009

Versiunea 55. În timpul obositorului proces de recitare și rafinare, a apărut o nouă gaură.

Iau foc. Începe să mă calce pe nervi!

— M-am săturat de povestea asta! Înainte, era partea neli-niară, acum e partea liniară, care părea sub control și care uite-o că cedează!

Am vorbit deja despre rezultatul nostru cam peste tot, săptămâna trecută l-am anunțat la New York, mâine Clément îl anunță la Nisa, de-acum nu mai avem dreptul să greșim, chiar trebuie să fie corect!

Dar tot e o problemă, și trebuie să refacem nenorocita aia de Teoremă 7.4...

Sunt singur acasă cu copiii dormind, orele trec în fața peretelui mare de sticlă, dincolo de care e noaptea neagră. Așezat pe canapea, culcat pe canapea, în genunchi lângă canapea, îmi pun la încercare toată dibăcia, scriu, scriu. Degeaba.

În noaptea aceea, m-am culcat pe la patru dimineața, într-o stare vecină cu disperarea.

*

Date: Mon, 6 Apr 2009 20:03:45 +0800

Subject: Landau versiunea 51

From: Clement Mouhot

<clement.mouhot@ceremade.dauphine.fr>

To: Cedric Villani <Cedric.VILLANI@umpa.ens-lyon.fr>

Iti trimit unde-am ajuns, dupa 120 de pagini recitite la virgula, nu mai pot, fac o pauza asta-seara. Iti trimit versiunea 51, care in mod normal integreaza (dupa verificarea detaliata a mesajelor) toate modifurile si cerintele tale prin mail (figuri, remarci, dependenta de constante...), ca si sectiunea ta 10 rescrisa (izvorata din ultima versiune 50 pe care mi-ai trimis-o) si din noua sectiune 12.

Dinspre partea mea, am facut o relectura integrala pana la sectiunea 9 inclusiv (adica pana la pagina 118). Sunt multe NdCM* la care trebuie sa te uiti si un pachet de corecturi (amanunte) care mi se par fara dubiu. Printre NdCM, doar doua corespund unor eventuale probleme in demonstratii (dar de fiecare data nu pot pune in cauza rezultatul): sectiunea 7 pagina 100 si sectiunea 9 pagina 116.

Uite ce-ti propun in continuare: tu pleci de la versiunea asta 51 si reiei sectiunile de la 1 la 9 ca sa verifici toate NdCM si sa le elimini transand de fiecare data, intr-o versiune sa zicem 51-cv, iar eu recitesc la virgula sectiunile 10-11-12-13-14? (putem spera ca ne trimitem fisierele maine-seara sau miercuri dimineata?)

Numai bine, Clement

* Notă a lui Clément Mouhot. (*N. t.*)

Capitolul 27

Princeton, dimineața de 9 aprilie 2009

Ahhh... Ce nasol e să te trezești. Abia, abia mă scol, mă așez pe pat.

Îh?

Aud o voce-n cap. *Trebuie să treci al doilea termen în partea cealaltă, să faci transformata Fourier și să inversezi în L^2 .*

Nu se poate!

Mâzgălesc o frază pe un colț de hârtie, zoresc copiii să se pregătească, le fac micul dejun și-i alerg prin iarba umedă până la stația autobuzului școlar. Un frumos autobuz galben-negru, ca în filmele americane!

Toți copiii suie cumiți în autobuzul care-i duce la școala din Littlebrook. E nostim când te gândești la concentrația de fii și fiice de oameni de știință de înalt nivel care stau pe scaunele acestui autobuz. Sunt, de exemplu, copiii compatriotului meu Ngô Bao Châu, care a lăsat regiunea pariziană pentru Princeton. Ngô a ținut afișul pentru rezolvarea sa spectaculoasă a unei probleme vechi, numite Lema Fundamentală. E un domeniu matematic vestit pentru dificultatea sa și care mi-e complet străin. În orice caz, toată lumea îl dă pe Ngô favorit la următorul tur de medalii Fields.

Gata, copiii au plecat. La Littlebrook o să-i răsfete, o să aibă lecția de engleză personalizată în timpul zilei, vor avea grijă să le dea încredere în ei – pentru asta, se poate avea în-

credere în educatorii americani. Iar după-amiază, o să se întoarcă fericiți de ziua lor și vor fi și mai fericiți să-și facă temele – din fericire, ura față de temele pentru acasă încă n-a ajuns în Statele Unite, cel puțin nu la Princeton.

Mă-ntorc repede acasă, mă instalez într-un fotoliu și testez ideea care mi-a apărut ca prin farmec azi-dimineață, ca să umplu blestemata de gaură.

— Rămân la Fourier, cum mi-a sugerat Michael Sigal, nu merg deloc pe transformată Laplace, dar înainte de a inversa, încep să separ ca aici și-apoi în doi timpi...

Scriu și mă uit. O clipă de reflecție.

Merge! Așa cred...

Merge!! E sigur!

Clar că așa trebuia să fac. De-aici încolo, pot dezvolta, pot adăuga ingrediente, dar am deja trama.

Acum e doar o chestiune de răbdare, mi-e limpede că dezvoltarea ideii conduce la scheme pe care le recunosc. Scriu detaliile, nu mă grăbesc. E momentul să-mi pun în valoare cei optsprezece ani de practică matematică.

— Hmm, acum aduce cu o inegalitate Young... iar apoi e ca în demonstrația inegalității lui Minkowski... schimb variabilele, separ integralele...

Trec în mod semi-automat. Acum îmi pot folosi întreaga experiență... dar ca să ajung aici, mi-a trebuit un apel pe firul direct. Faimoasa linie directă, când primești un telefon de la dumnezeul matematicii și o voce îți răsună-n cap. E extrem de rar, credeți-mă!

Îmi amintesc de o altă experiență de linie directă. În iarna lui 2001, profesor la Lyon, am ținut o vreme un curs la Institutul Henri Poincaré, în fiecare miercuri. Expuneam cvasi-soluția mea pentru conjectura lui Cercignani când, într-o miercuri, Thierry Bodineau m-a oprit și m-a întrebat dacă nu puteam să amelioresc o anumite parte a enunțului. La întoarcere,

în TGV, gândindu-mă la asta, am pus ca iluminat mâna pe o schemă de demonstrație mult mai puternică și care-mi permitea chiar să închei demonstrația conjecturii. Apoi, în zilele următoare, am completat argumentul ca să tratez un caz mai general, o extensie a conjecturii într-un anume sens; și mă pregăteam, mândru, ca miercurea următoare să expun noile rezultate.

Dar marți am descoperit o eroare fatală în demonstrația teoremei a doua. Mi-am petrecut toată seara încercând s-o repar și m-am culcat pe la trei-patru noaptea, fără succes.

A doua zi, abia trezit, răsuceam problema în minte, nepuțând accepta că trebuie să renunț să-mi prezint rezultatul. M-am dus la gară cu capul plin de piste care nu duceau nicăieri. Dar, de îndată ce m-am instalat în TGV, a venit iluminarea și *am știut* cum trebuie corectată demonstrația.

De data asta, tot drumul în TGV am pus pe picioare rezultatul și l-am anunțat cu toată mândria care se poate imagina. Publicată puțin mai târziu, demonstrația asta *made in TGV* a format materia unuia dintre cele mai bune articole ale mele.

Iar în dimineața asta de 9 aprilie 2009, o nouă mică iluminare mi-a bătut la poarta minții și a limpezit totul. Mare păcat: cu siguranță, cititorii articolului nu vor simți euforia asta, iluminarea va fi înecată în tehnică...

*

To state the main result of this section we shall write $\mathbb{Z}_*^d = \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$; and if a sequence of functions $\Phi(k, t)$ ($k \in \mathbb{Z}_*^d$, $t \in \mathbb{R}$) is given, then $\|\Phi(t)\|_\lambda = \sum_k e^{2\pi\lambda|k|} |\Phi(k, t)|$. We shall use $K(s) \Phi(t)$ as a shorthand for $(K(k, s) \Phi(k, t))_{k \in \mathbb{Z}_*^d}$, etc.

Theorem 7.7 (*Growth control via integral inequalities*). Let $f^0 = f^0(v)$ and $W = W(x)$ satisfy condition **(L)** from Subsection 2.2 with constants C_0, λ_0, κ ; in particular $|\tilde{f}^0(\eta)| \leq C_0 e^{-2\pi\lambda_0|\eta|}$. Let further

$$C_W = \max \left\{ \sum_{k \in \mathbb{Z}_*^d} |\widehat{W}(k)|, \sup_{k \in \mathbb{Z}_*^d} |k| |\widehat{W}(k)| \right\}.$$

Let $A \geq 0$, $\mu \geq 0$, $\lambda \in (0, \lambda^*]$ with $0 < \lambda^* < \lambda_0$. Let $(\Phi(k, t))_{k \in \mathbb{Z}_*^d, t \geq 0}$ be a continuous function of $t \geq 0$, valued in $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_*^d}$, such that

$$\begin{aligned} \forall t \geq 0, \quad & \left\| \Phi(t) - \int_0^t K^0(t - \tau) \Phi(\tau) d\tau \right\|_{\lambda t + \mu} \\ & \leq A + \int_0^t \left[K_0(t, \tau) + K_1(t, \tau) + \frac{c_0}{(1 + \tau)^m} \right] \|\Phi(\tau)\|_{\lambda \tau + \mu} d\tau, \end{aligned} \quad (7.22)$$

where $c_0 \geq 0$, $m > 1$ and $K_0(t, \tau)$, $K_1(t, \tau)$ are nonnegative kernels. Let $\varphi(t) = \|\Phi(t)\|_{\lambda t + \mu}$. Then

(i) Assume $\gamma > 1$ and $K_1 = c K^{(\alpha), \gamma}$ for some $c > 0$, $\alpha \in (0, \overline{\alpha}(\gamma))$, where $K^{(\alpha), \gamma}$ is defined by

$$K^{(\alpha), \gamma}(t, \tau) = (1 + \tau) d \sup_{k \neq 0, \ell \neq 0} \frac{e^{-\alpha|\ell|} e^{-\alpha\left(\frac{t-\tau}{t}\right)|k-\ell|} e^{-\alpha|k(t-\tau)+\ell\tau|}}{1 + |k - \ell|^\gamma},$$

and $\overline{\alpha}(\gamma)$ appears in Proposition 7.1. Then there are positive constants C and χ , depending only on $\gamma, \lambda^*, \lambda_0, \kappa, c_0, C_W, m$, uniform as $\gamma \rightarrow 1$, such that if

$$\sup_{t \geq 0} \int_0^t K_0(t, \tau) d\tau \leq \chi \quad (7.23)$$

and

$$\sup_{t \geq 0} \left(\int_0^t K_0(t, \tau)^2 d\tau \right)^{1/2} + \sup_{\tau \geq 0} \int_\tau^\infty K_0(t, \tau) dt \leq 1, \quad (7.24)$$

then for any $\varepsilon \in (0, \alpha)$,

$$\forall t \geq 0, \quad \varphi(t) \leq C A \frac{(1 + c_0^2)}{\sqrt{\varepsilon}} e^{C c_0} \left(1 + \frac{c}{\alpha \varepsilon}\right) \times e^{CT} e^{C c (1+T^2)} e^{\varepsilon t}, \quad (7.25)$$

where

$$T = C \max \left\{ \left(\frac{c^2}{\alpha^5 \varepsilon^{2+\gamma}} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} ; \left(\frac{c}{\alpha^2 \varepsilon^{\gamma+\frac{1}{2}}} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} ; \left(\frac{c_0^2}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{2m-1}} \right\}. \quad (7.26)$$

(ii) Assume $K_1 = \sum_{1 \leq i \leq N} c_i K^{(\alpha_i),1}$ for some $\alpha_i \in (0, \overline{\alpha}(1))$, where $\overline{\alpha}(1)$ appears in Proposition 7.1; then there is a numeric constant $\Gamma > 0$ such that whenever

$$1 \geq \varepsilon \geq \Gamma \sum_{i=1}^N \frac{c_i}{\alpha_i^3},$$

one has, with the same notation as in (i),

$$\forall t \geq 0, \quad \varphi(t) \leq C A \frac{(1 + c_0^2) e^{C c_0}}{\sqrt{\varepsilon}} e^{CT} e^{C c (1+T^2)} e^{\varepsilon t}, \quad (7.27)$$

where

$$c = \sum_{i=1}^N c_i, \quad T = C \max \left\{ \frac{1}{\varepsilon^2} \left(\sum_{i=1}^N \frac{c_i}{\alpha_i^3} \right) ; \left(\frac{c_0^2}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{2m-1}} \right\}.$$

Proof of Theorem 7.7. We only treat (i), since the reasoning for (ii) is rather similar; and we only establish the conclusion as an *a priori* estimate, skipping the continuity/approximation argument needed to turn it into a rigorous estimate. Then the proof is done in three steps.

Step 1 : Crude pointwise bounds. From (7.22) we have

$$\begin{aligned}
 \varphi(t) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}_*^d} |\Phi(k, t)| e^{2\pi(\lambda t + \mu)|k|} \\
 &\leq A + \sum_k \int_0^t |K^0(k, t - \tau)| e^{2\pi(\lambda t + \mu)|k|} |\Phi(t, \tau)| d\tau \\
 &\quad + \int_0^t \left[K_0(t, \tau) + K_1(t, \tau) + \frac{c_0}{(1 + \tau)^m} \right] \varphi(\tau) d\tau \\
 &\leq A + \int_0^t \left[\left(\sup_k |K^0(k, t - \tau)| e^{2\pi\lambda(t - \tau)|k|} \right) \right. \\
 &\quad \left. + K_1(t, \tau) + K_0(t, \tau) + \frac{c_0}{(1 + \tau)^m} \right] \varphi(\tau) d\tau.
 \end{aligned} \tag{7.28}$$

We note that for any $k \in \mathbb{Z}_*^d$ and $t \geq 0$,

$$\begin{aligned}
 |K^0(k, t - \tau)| e^{2\pi\lambda|k|(t - \tau)} &\leq 4\pi^2 |\widehat{W}(k)| C_0 e^{-2\pi(\lambda_0 - \lambda)|k|t} |k|^2 t \\
 &\leq \frac{C C_0}{\lambda_0 - \lambda} \left(\sup_{k \neq 0} |k| |\widehat{W}(k)| \right) \leq \frac{C C_0 C_W}{\lambda_0 - \lambda},
 \end{aligned}$$

where (here as below) C stands for a numeric constant which may change from line to line. Assuming $\int K_0(t, \tau) d\tau \leq 1/2$, we deduce from (7.28)

$$\begin{aligned}
 \varphi(t) &\leq A + \frac{1}{2} \left(\sup_{0 \leq \tau \leq t} \varphi(\tau) \right) \\
 &\quad + C \int_0^t \left(\frac{C_0 C_W}{\lambda_0 - \lambda} + c(1 + t) + \frac{c_0}{(1 + \tau)^m} \right) \varphi(\tau) d\tau,
 \end{aligned}$$

and by Gronwall's lemma

$$\varphi(t) \leq 2A e^{C \left(\frac{C_0 C_W}{\lambda_0 - \lambda} t + c(t + t^2) + c_0 C_m \right)}, \tag{7.29}$$

where $C_m = \int_0^\infty (1 + \tau)^{-m} d\tau$.

Step 2 : L^2 bound. This is the step where the smallness assumption (7.23) will be most important. For all $k \in \mathbb{Z}_*^d$, $t \geq 0$, we define

$$\Psi_k(t) = e^{-\varepsilon t} \Phi(k, t) e^{2\pi(\lambda t + \mu)|k|}, \tag{7.30}$$

$$\mathcal{K}_k^0(t) = e^{-\varepsilon t} K^0(k, t) e^{2\pi(\lambda t + \mu)|k|}, \quad (7.31)$$

$$\begin{aligned} R_k(t) &= e^{-\varepsilon t} \left(\Phi(k, t) - \int_0^t K^0(k, t - \tau) \Phi(k, \tau) d\tau \right) \\ &\quad \times e^{2\pi(\lambda t + \mu)|k|} \\ &= (\Psi_k - \Psi_k * \mathcal{K}_k^0)(t), \end{aligned} \quad (7.32)$$

and we extend all these functions by 0 for negative values of t . Taking Fourier transform in the time variable yields $\widehat{R}_k = (1 - \widehat{\mathcal{K}}_k^0) \widehat{\Psi}_k$; since condition **(L)** implies $|1 - \widehat{\mathcal{K}}_k^0| \geq \kappa$, we deduce $\|\widehat{\Psi}_k\|_{L^2} \leq \kappa^{-1} \|\widehat{R}_k\|_{L^2}$, *i.e.*,

$$\|\Psi_k\|_{L^2(dt)} \leq \frac{\|R_k\|_{L^2(dt)}}{\kappa}. \quad (7.33)$$

Plugging (7.33) into (7.32), we deduce

$$\forall k \in \mathbb{Z}_*^d, \quad \|\Psi_k - R_k\|_{L^2(dt)} \leq \frac{\|\mathcal{K}_k^0\|_{L^1(dt)}}{\kappa} \|R_k\|_{L^2(dt)}. \quad (7.34)$$

Then

$$\begin{aligned} \|\varphi(t) e^{-\varepsilon t}\|_{L^2(dt)} &= \left\| \sum_k |\Psi_k| \right\|_{L^2(dt)} \\ &\leq \left\| \sum_k |R_k| \right\|_{L^2(dt)} + \sum_k \|R_k - \Psi_k\|_{L^2(dt)} \\ &\leq \left\| \sum_k |R_k| \right\|_{L^2(dt)} \left(1 + \frac{1}{\kappa} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}_*^d} \|\mathcal{K}_\ell^0\|_{L^1(dt)} \right). \end{aligned} \quad (7.35)$$

(Note : We bounded $\|R_\ell\|$ by $\|\sum_k |R_k|\|$, which seems very crude; but the decay of \mathcal{K}_k^0 as a function of k will save us.) Next, we note that

$$\begin{aligned} \|\mathcal{K}_k^0\|_{L^1(dt)} &\leq 4\pi^2 |\widehat{W}(k)| \int_0^\infty C_0 e^{-2\pi(\lambda_0 - \lambda)|k|t} |k|^2 t dt \\ &\leq 4\pi^2 |\widehat{W}(k)| \frac{C_0}{(\lambda_0 - \lambda)^2}, \end{aligned}$$

$$\sum_k \|\mathcal{K}_k^0\|_{L^1(dt)} \leq 4\pi^2 \left(\sum_k |\widehat{W}(k)| \right) \frac{C_0}{(\lambda_0 - \lambda)^2}.$$

Plugging this in (7.35) and using (7.22) again, we obtain

$$\begin{aligned} \|\varphi(t) e^{-\varepsilon t}\|_{L^2(dt)} &\leq \left(1 + \frac{C C_0 C_W}{\kappa (\lambda_0 - \lambda)^2} \right) \left\| \sum_k |R_k| \right\|_{L^2(dt)} \\ &\leq \left(1 + \frac{C C_0 C_W}{\kappa (\lambda_0 - \lambda)^2} \right) \left\{ \int_0^\infty e^{-2\varepsilon t} \left(A + \int_0^t \left[K_1 + K_0 \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. + \frac{c_0}{(1 + \tau)^m} \right] \varphi(\tau) d\tau \right)^2 dt \right\}^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (7.36)$$

We separate this (by Minkowski's inequality) into various contributions which we estimate separately. First, of course

$$\left(\int_0^\infty e^{-2\varepsilon t} A^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{A}{\sqrt{2\varepsilon}}. \quad (7.37)$$

Next, for any $T \geq 1$, by Step 1 and $\int_0^t K_1(t, \tau) d\tau \leq Cc(1 + t)/\alpha$,

$$\begin{aligned} &\left\{ \int_0^T e^{-2\varepsilon t} \left(\int_0^t K_1(t, \tau) \varphi(\tau) d\tau \right)^2 dt \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left[\sup_{0 \leq t \leq T} \varphi(t) \right] \left(\int_0^T e^{-2\varepsilon t} \left(\int_0^t K_1(t, \tau) d\tau \right)^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C A e^{C \left[\frac{C_0 C_W}{\lambda_0 - \lambda} T + c(T + T^2) \right]} \frac{c}{\alpha} \left(\int_0^\infty e^{-2\varepsilon t} (1 + t)^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C A \frac{c}{\alpha \varepsilon^{3/2}} e^{C \left[\frac{C_0 C_W}{\lambda_0 - \lambda} T + c(T + T^2) \right]}. \end{aligned} \quad (7.38)$$

Invoking Jensen and Fubini, we also have

$$\begin{aligned}
& \left\{ \int_T^\infty e^{-2\varepsilon t} \left(\int_0^t K_1(t, \tau) \varphi(\tau) d\tau \right)^2 dt \right\}^{\frac{1}{2}} \tag{7.39} \\
&= \left\{ \int_T^\infty \left(\int_0^t K_1(t, \tau) e^{-\varepsilon(t-\tau)} e^{-\varepsilon\tau} \varphi(\tau) d\tau \right)^2 dt \right\}^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left\{ \int_T^\infty \left(\int_0^t K_1(t, \tau) e^{-\varepsilon(t-\tau)} d\tau \right) \right. \\
&\quad \times \left. \left(\int_0^t K_1(t, \tau) e^{-\varepsilon(t-\tau)} e^{-2\varepsilon\tau} \varphi(\tau)^2 d\tau \right) dt \right\}^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\sup_{t \geq T} \int_0^t e^{-\varepsilon t} K_1(t, \tau) e^{\varepsilon\tau} d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad \times \left(\int_T^\infty \int_0^t K_1(t, \tau) e^{-\varepsilon(t-\tau)} e^{-2\varepsilon\tau} \varphi(\tau)^2 d\tau dt \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\sup_{t \geq T} \int_0^t e^{-\varepsilon t} K_1(t, \tau) e^{\varepsilon\tau} d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad \times \left(\int_0^\infty \int_{\max\{\tau; T\}}^{+\infty} K_1(t, \tau) e^{-\varepsilon(t-\tau)} e^{-2\varepsilon\tau} \varphi(\tau)^2 dt d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\sup_{t \geq T} \int_0^t e^{-\varepsilon t} K_1(t, \tau) e^{\varepsilon\tau} d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad \times \left(\sup_{\tau \geq 0} \int_\tau^\infty e^{\varepsilon\tau} K_1(t, \tau) e^{-\varepsilon t} dt \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad \times \left(\int_0^\infty e^{-2\varepsilon\tau} \varphi(\tau)^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

(Basically we copied the proof of Young's inequality.) Similarly,

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \int_0^\infty e^{-2\varepsilon t} \left(\int_0^t K_0(t, \tau) \varphi(\tau) d\tau \right)^2 dt \right\}^{\frac{1}{2}} \\
 & \leq \left(\sup_{t \geq 0} \int_0^t e^{-\varepsilon t} K_0(t, \tau) e^{\varepsilon \tau} d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\
 & \quad \times \left(\sup_{\tau \geq 0} \int_\tau^\infty e^{\varepsilon \tau} K_0(t, \tau) e^{-\varepsilon t} dt \right)^{\frac{1}{2}} \\
 & \quad \times \left(\int_0^\infty e^{-2\varepsilon \tau} \varphi(\tau)^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\
 & \leq \left(\sup_{t \geq 0} \int_0^t K_0(t, \tau) d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sup_{\tau \geq 0} \int_\tau^\infty K_0(t, \tau) dt \right)^{\frac{1}{2}} \\
 & \quad \times \left(\int_0^\infty e^{-2\varepsilon \tau} \varphi(\tau)^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}}.
 \end{aligned} \tag{7.40}$$

The last term is also split, this time according to $\tau \leq T$ or $\tau > T$:

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \int_0^\infty e^{-2\varepsilon t} \left(\int_0^T \frac{c_0 \varphi(\tau)}{(1+\tau)^m} d\tau \right)^2 dt \right\}^{\frac{1}{2}} \\
 & \leq c_0 \left(\sup_{0 \leq \tau \leq T} \varphi(\tau) \right) \\
 & \quad \times \left\{ \int_0^\infty e^{-2\varepsilon t} \left(\int_0^T \frac{d\tau}{(1+\tau)^m} \right)^2 dt \right\}^{\frac{1}{2}} \\
 & \leq c_0 \frac{CA}{\sqrt{\varepsilon}} e^{C \left[\left(\frac{c_0 C_W}{\lambda_0 - \lambda} \right) T + c(T+T^2) \right]} C_m,
 \end{aligned} \tag{7.41}$$

and

$$\begin{aligned}
& \left\{ \int_0^\infty e^{-2\varepsilon t} \left(\int_T^t \frac{c_0 \varphi(\tau) d\tau}{(1+\tau)^m} \right)^2 dt \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (7.42) \\
&= c_0 \left\{ \int_0^\infty \left(\int_T^t e^{-\varepsilon(t-\tau)} \frac{e^{-\varepsilon\tau} \varphi(\tau)}{(1+\tau)^m} d\tau \right)^2 dt \right\}^{\frac{1}{2}} \\
&\leq c_0 \left\{ \int_0^\infty \left(\int_T^t \frac{e^{-2\varepsilon(t-\tau)}}{(1+\tau)^{2m}} d\tau \right) \left(\int_T^t e^{-2\varepsilon\tau} \varphi(\tau)^2 d\tau \right) dt \right\}^{\frac{1}{2}} \\
&\leq c_0 \left(\int_0^\infty e^{-2\varepsilon t} \varphi(t)^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^\infty \int_T^t \frac{e^{-2\varepsilon(t-\tau)}}{(1+\tau)^{2m}} d\tau dt \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= c_0 \left(\int_0^\infty e^{-2\varepsilon t} \varphi(t)^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad \times \left(\int_T^\infty \frac{1}{(1+\tau)^{2m}} \left(\int_\tau^\infty e^{-2\varepsilon(t-\tau)} dt \right) d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= c_0 \left(\int_0^\infty e^{-2\varepsilon t} \varphi(t)^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_T^\infty \frac{d\tau}{(1+\tau)^{2m}} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad \times \left(\int_0^\infty e^{-2\varepsilon s} ds \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{C_{2m}^{1/2} c_0}{\sqrt{\varepsilon} T^{m-1/2}} \left(\int_0^\infty e^{-2\varepsilon t} \varphi(t)^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Gathering estimates (7.37) to (7.42), we deduce from (7.36)

$$\begin{aligned}
\|\varphi(t) e^{-\varepsilon t}\|_{L^2(dt)} &\leq \left(1 + \frac{C C_0 C_W}{\kappa(\lambda_0 - \lambda)^2} \right) \frac{C A}{\sqrt{\varepsilon}} \left[1 + \left(\frac{c}{\alpha \varepsilon} + c_0 C_m \right) \right] \\
&\quad \times e^C \left[\frac{C_0 C_W}{\lambda_0 - \lambda} T + c(T + T^2) \right] + a \|\varphi(t) e^{-\varepsilon t}\|_{L^2(dt)}, \quad (7.43)
\end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned}
a &= \left(1 + \frac{C C_0 C_W}{\kappa(\lambda_0 - \lambda)^2} \right) \left[\left(\sup_{t \geq T} \int_0^t e^{-\varepsilon t} K_1(t, \tau) e^{\varepsilon\tau} d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \right. \\
&\quad \times \left. \left(\sup_{\tau \geq 0} \int_\tau^\infty e^{\varepsilon\tau} K_1(t, \tau) e^{-\varepsilon t} dt \right)^{\frac{1}{2}} \right. \\
&\quad \left. + \left(\sup_{t \geq 0} \int_0^t K_0(t, \tau) d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sup_{\tau \geq 0} \int_\tau^\infty K_0(t, \tau) dt \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{C_{2m}^{1/2} c_0}{\sqrt{\varepsilon} T^{m-1/2}} \right]
\end{aligned}$$

Using Propositions 7.1 (case $\gamma > 1$) and 7.5, as well as assumptions (7.23) and (7.24), we see that $a \leq 1/2$ for χ small enough and T satisfying (7.26). Then from (7.43) follows

$$\begin{aligned} \|\varphi(t) e^{-\varepsilon t}\|_{L^2(dt)} &\leq \left(1 + \frac{C C_0 C_W}{\kappa(\lambda_0 - \lambda)^2}\right) \frac{C A}{\sqrt{\varepsilon}} \\ &\quad \times \left[1 + \left(\frac{c}{\alpha \varepsilon} + c_0 C_m\right)\right] e^C \left[\frac{C_0 C_W}{\lambda_0 - \lambda} T + c(T + T^2)\right]. \end{aligned}$$

Step 3 : Refined pointwise bounds. Let us use (7.22) a third time, now for $t \geq T$:

$$\begin{aligned} e^{-\varepsilon t} \varphi(t) &\leq A e^{-\varepsilon t} \tag{7.44} \\ &\quad + \int_0^t \left(\sup_k |K^0(k, t - \tau)| e^{2\pi\lambda(t-\tau)|k|} \right) \varphi(\tau) e^{-\varepsilon\tau} d\tau \\ &\quad + \int_0^t \left[K_0(t, \tau) + \frac{c_0}{(1 + \tau)^m} \right] \varphi(\tau) e^{-\varepsilon\tau} d\tau \\ &\quad + \int_0^t (e^{-\varepsilon t} K_1(t, \tau) e^{\varepsilon\tau}) \varphi(\tau) e^{-\varepsilon\tau} d\tau \\ &\leq A e^{-\varepsilon t} + \left[\left(\int_0^t \left(\sup_{k \in \mathbb{Z}_*^d} |K^0(k, t - \tau)| e^{2\pi\lambda(t-\tau)|k|} \right)^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \right. \\ &\quad + \left(\int_0^t K_0(t, \tau)^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_0^\infty \frac{c_0^2}{(1 + \tau)^{2m}} d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad \left. + \left(\int_0^t e^{-2\varepsilon t} K_1(t, \tau)^2 e^{2\varepsilon\tau} d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \right] \left(\int_0^\infty \varphi(\tau)^2 e^{-2\varepsilon\tau} d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

We note that, for any $k \in \mathbb{Z}_*^d$,

$$\begin{aligned} \left(|K^0(k, t)| e^{2\pi\lambda|k|t} \right)^2 &\leq 16 \pi^4 |\widehat{W}(k)|^2 |\tilde{f}^0(kt)|^2 |k|^4 t^2 e^{4\pi\lambda|k|t} \\ &\leq C C_0^2 |\widehat{W}(k)|^2 e^{-4\pi(\lambda_0 - \lambda)|k|t} |k|^4 t^2 \\ &\leq \frac{C C_0^2}{(\lambda_0 - \lambda)^2} |\widehat{W}(k)|^2 e^{-2\pi(\lambda_0 - \lambda)|k|t} |k|^2 \\ &\leq \frac{C C_0^2}{(\lambda_0 - \lambda)^2} C_W^2 e^{-2\pi(\lambda_0 - \lambda)|k|t} \\ &\leq \frac{C C_0^2}{(\lambda_0 - \lambda)^2} C_W^2 e^{-2\pi(\lambda_0 - \lambda)t}, \end{aligned}$$

so

$$\int_0^t \left(\sup_{k \in \mathbb{Z}_*^d} |K^0(k, t - \tau)| e^{2\pi\lambda(t-\tau)|k|} \right)^2 d\tau \leq \frac{C C_0^2 C_W^2}{(\lambda_0 - \lambda)^3}.$$

Then the conclusion follows from (7.44), Corollary 7.4, conditions (7.26) and (7.24), and Step 2. \square

Capitolul 28

Princeton, 14 aprilie 2009

Azi am acceptat în mod oficial postul de la IHP.

Iar teorema noastră e pe drumul cel bun. În zilele din urmă, am lucrat de două ori până la patru dimineața, sunt la fel de motivat ca înainte.

Diseară mă așteaptă o nouă lungă repriză în *tête à tête* cu Problema. Prima etapă – pun apa la fiert.

Dar mă cuprinde groaza când descopăr că în casă nu mai e ceai! Nici nu concep să mă lansez în orele de calcule care se profilează fără ajutorul *Camelliei sinensis*.

S-a făcut deja noapte, n-am de ce să sper că ar mai exista vreo dugheană deschisă în Princeton. Ascult doar de curajul meu, încalec bicicleta și merg să fur câteva plicuri din sala comună a departamentului de matematică.

Ajuns la ușa laboratorului, tastez codul de intrare, urc la etaj. Beznă peste tot, doar pe sub ușa lui Jean Bourgain răzbate o rază de lumină. Nu sunt câtuși de puțin surprins: chiar dacă Jean a obținut cele mai mari onoruri și e considerat drept unul dintre cei mai puternici analiști din ultimele decenii, și-a păstrat orarul de lucru al lupilor tineri cu dinți lungi – și, în plus, îi place să rămână pe ora Coastei de Vest, unde merge cu regularitate. Pot paria că și el va sta până pe la jumătatea nopții.

Mă strecur în sala comună și, sub privirea reprobatoare a lui André Weil, înhaț plicurile atât de râvnite. Cobor în grabă.

Pe drum însă, dau peste Tom Spencer, mare specialist în fizica statistică și unul dintre cei mai buni prieteni ai mei din Institut. Sunt nevoit să-mi mărturisesc crima.

— Aha, ceai! *Keeps you going, eh?**

Înapoi acasă. Acum am prețioasele plicuri, le am în față, voi putea porni ceremonia.

Și muzică, vă rog, altfel mor pe loc.

În perioada asta ascult mult cântece. Catherine Ribeiro, Ribeiro non stop. Danielle Messia cea tragică și abandonată. *Passionaria* Catherine Ribeiro. Mama Béa Tekielski, ecorșeu cu scâncet magnific. Ribeiro, Ribeiro, Ribeiro. Muzica, tovarășă indispensabilă a momentelor de căutare solitară.

Greu de găsit ceva mai eficient decât muzica pentru a te readece într-un context uitat. Îmi amintesc de șocul de pe față bunicului meu când m-a auzit pentru prima oară cântând o piesă de Francis Poulenc; dintr-odată, se văzuse proiectat cu șaizeci de ani în urmă, în apartamentul modest, cu pereți prea subțiri, în care răsunau toate operele vecinului de palier, compozitor de muzică clasică scufundat în același curent estetic ca și Poulenc.

Cât despre mine, când ascult Gundula Janowitz intonând *Gretchen am Spinnrade*** , redevin tânărul internat pentru pneumotorax la serviciul de reanimare de la Spitalul Cochin, care își petrecea o parte din zi devorând *Carmen Cru**** , și o parte din noapte discutând cu internii despre muzică, apoi dormind cu un ursuleț de pluș irlandez împrumutat de o prietenă.

Cemetery Polka râgâită de Tom Waits mă trimite la al doilea pneumotorax, într-un mare spital lyonez, cu un vecin de cameră hazos care le făcea să moară de râs pe infirmiere.

Metamorfoza lui John Lennon în Morsă (*Walrus*) mă duce într-o sală de la École Polytechnique, la optsprezece ani, între două examene orale ale concursului de admitere, pe când viitorul desena un simpatic semn de întrebare.

* Te menține în formă, nu? (N. t.)

** *Gretchen la vârtelniță*, lied de Schubert, pe versuri de Goethe (din *Faust*). (N. t.)

*** Bandă desenată. (N. t.)

Trei ani mai târziu, începutul dramatic al Primului Concert pentru pian al lui Brahms tocmai răsună în odăița mea de la internatul Școlii Normale Superioare, anume atunci când o tânără îmi bătea emoționată la ușă fără nici o explicație.

Ca să mă scufund din nou în prima copilărie, nimic mai bun decât obsedantul *Porque Te Vas*, care făcuse gloria lui Jeanette, sarcasticul moderat *Baleine Bleue* al lui Steve Waring sau decapantul *Grand Méchant Loup* al lui Tachan. Sau, habar n-am de ce, o anume temă din Concertul pentru vioară de Beethoven, pe care-o fredona mereu mama.

Pentru doisprezece ani, câteva dintre bucățile preferate ale părinților: *Les poètes* de Aragon și Ferrat, *l'Éducation sentimentale* de Maxime le Forrestier, *Nancy* de Leonard Cohen, *Le Phoque* de Beau Dommage, *L'Horloge du fond de l'eau* și *Fil Blanc* de Enfants Terribles, *Oxigène* de Jean-Michel Jarre, sau chiar „nerodul“* din cântecul lui Graeme Allwright care se încăpățânează să înainteze atunci când apa i-a ajuns *Jusqu'à la ceinture*.

Iar pentru adolescență, printre clipurile la care mă uitam pe Canalul 6 și printre casetele de care făceam rost de te miri unde, lista ar putea fi, la grămadă: *Airport*, *Envole-moi*, *Tombé du ciel*, *Poulailler's Song*, *Le Jerk*, *King Kong 5*, *Marcia Baïla*, *Lætitia*, *Barbara*, *L'aigle noir*, *L'Oiseau de nuit*, *Les Nuits sans soleil*, *Madame Rêve*, *Sweet dreams*, *Les Mots Bleus*, *Sounds of Silence*, *The Boxer*, *Still Loving You*, *L'Étrange Comédie*, *Sans contrefaçon*, *Maldon'*, *Changer la Vie*, *Le Bagad de Lann-Bihoué*, *Aux Sombres Héros de l'Amer*, *La Ligne Holworth*, *Armstrong*, *Mississippi River*, *Le Connemara*, *Sidi H'Bibi*, *Bloody Sunday*, *Wind of Change*, *Les Murs de poussière*, *Mon Copain Bismarck*, *Hexagone*, *Le France*, *Russians*, *J'ai vu*, *Oncle Archibald*, *Sentimental Bourreau*...

* *Le vieux con*, în original (N. t.)

De-atâtea ori m-am îndrăgostit de muzici de toate felurile, clasică, pop sau rock; le-am ascultat și răsascultat, pe unele de mai multe sute de ori, fermecat de starea de grație care trebuie să fi domnit peste nașterea lor. După *Simfonia din Lumea nouă* a lui Dvořák, care chiar marca intrarea mea în lumea cea nouă a muzicii numite clasice, au urmat al cincilea concert brandenburgic de Bach, a șaptea simfonie a lui Beethoven, al treilea concert de Rachmaninov, a doua simfonie de Mahler, a patra simfonie de Brahms, a șasea sonată de Prokofiev, prima sonată a lui Berg... Sonata lui Liszt, Studiile pentru pian ale lui Ligeti, ambigua Simfonie a cincea de Șostakovici, Sonata D784 de Schubert, al șaselea preludiu al lui Chopin (cu interpretarea dramatică de rigoare, mă rog frumos). *Toccata* lui Boëllmann, *War Requiem* de Britten, fabulosul *Nixon in China* de John Adams. *A Day in the Life* a Beatleșilor, *Butcher's Tale* a lui Zombies, *Here Today* a lui Beach Boys, *Three Sisters* a Divinei Comedy. *Gino* a lui Têtes Raides, *Lisa la Goëlette* a lui Anne Sylvestre, *Excalibur* al lui William Sheller, *Monsieur* al lui Thomas Fersen. Roda-Gil cu fals ușurelul ei *Ce n'est rien*, cu a sa fals serioasă *Makhnovchina* și cu palatul ei cu coloanele pline de tartru, la sud sau la nord de iulie. François Hadji-Lazaro cu digurile lui, șlepurile, Parisul revoltat. Mort Shuman înfierbântându-se pentru plaja din Brooklyn by the sea, iar Pagani pentru Veneția care se-neacă. Léo Ferré cu a sa misterioasă *Inconnue de Londres* reorchestrată și cu *Câinele* lui turbat, singurul care mai rezistă când *Il n'y a plus rien*. Dylan, care evocă, din turnul său de observație, soarta cumplită a lui John Brown, Pink Floyd cântând nostalgici iarba verde de odinioară, Piazzola cântând Buenos Aires-ul la ora zero. *Romanța* lui Prokofiev și *Romanul* lui Morricone. Emoționantul *Manuel* al lui Adamo pe care l-am transcris la Moscova pentru gazdele îndrăgostite de muzică și de limba franceză, într-o epocă în care Internetul încă nu exista acolo pentru a pune la dispoziție textele cântecelor. Fabrizio de André plângându-l

pe Geordie spânzurat de-o coardă de aur, Giorgio Gaber care se credea Dumnezeu, Paolo Conte invitându-și iubita să-l urmeze. Micuțul René Simard storcând lacrimile mamelor quebecoaze și ale fetelor japoneze cu al său *Oiseau* cristalin și cu *Non ne pleures pas / Midori Iro No Yane* care-ți taie răsufierea. Les Frères Jacques cumpărându-și Generalul cu cinci stele de la Francis Blanche, Weepers Circus oferindu-le vulpilor dragoste sa, Olivia Ruiz reparând inimi și geamuri crăpate, Mes Aïeux traficând *iarbă* cu manglitori degenerați. Vian ambalându-se pentru o Java explozivă și Bécaud pentru o diabolică vânzare la licitație, Renaud cântând epopeea lui Gérard Lambert și Corbier pe aceea a blestematului elefantofil. Thiéfaine și lumea lui populată cu fete de cosași de marihuana, de sicrie cu rotile, Alligators nucleari și Diogeni băloși, care suceau mințile fetelor și băieților pe vremea când explodau cei douăzeci de ani ai mei. Dramaticii vibranți, Brel strigând ținuit de Ursa Mare, Utgé-Royo trezind la viață cântecul interzis *Mutins de 1917* al lui Debronckart, Ferrat salutând copilul care se ridică și jelindu-i pe cei căzuți pentru nenorocirea Mariei, Tachan făcând scandal că el nu vrea copii! Și-apoi elfii care te descumpănesc, Kate Bush cu al său *Army Dreamer*, France Gall cu *Le Petit Soldat*, Loreena McKennitt cu-al său *Bandit de grand chemin*, Tori Amos visându-se în *Joyeux Fantôme*, Amélie Morin hulind simpatic în *Rien ne va plus*. Și preferatele mele, tigroaicele care-ți fac pielea de găină: Melanie apostrofându-i pe cei care-i stau în preajmă, Danielle Messia lamentându-se c-a fost abandonată, Patti Smith cântând *Parce que la Nuit*, Ute Lemper cuprinsă de milă pentru soarta lui Marie Sanders, Francesca Solleville reînviind Comuna, Juliette jucându-se de-a Garçon Manqué, Nina Hagen găjâind un Kurt Weill, Gribouille urlându-și Corbii, sublimul duo Moullet-Ribeiro cântând *Pa- cea, Moartea și l'Oiseau devant la Porte!*

Nu trebuie neglijată nici o pistă ca să descoperi muzici noi. Concerte, forumuri de discuții, site-uri de muzică în acces liber...

și, evident, exemplarul webradio *Bide & Musique*, grație căruia i-am descoperit pe Évariste, Adonis, Marie, Amélie Morin, Bernard Brabant sau Bernard Icher, piste de decolare de pe Champs-Élysées și imnurile disco întru gloria Moscovei.

Așa-i și-n cercetare: cauți peste tot, stai la pândă, ascuți tot și, din când în când, te trezești că te-ai îndrăgostit și ești prins cu trup și suflet într-un proiect pe care ți-l repeți de sute și sute de ori și de-atunci încolo nu mai contează nimic – sau, oricum, extrem de puțin.

Uneori, cele două lumi comunică. Unele muzici, care m-au susținut în timp ce lucram, sunt asociate pentru totdeauna cu momente puternice din munca mea de cercetare.

Când o aud pe Juliette zbierând *Monsieur Vénus*, mă revăd sub un Vélux la Lyon, în iarna lui 2006, redactându-mi articolul pentru actele Congresului Internațional al Matematicienilor.

Comme avant, al șugubeței Amélie Morin, sau *Hung Up on a Dream*, al melodioșilor Zombies, mă transportă în vara lui 2007, într-un apartament australian unde am învățat, în contact fiind cu cei mai buni experți în domeniu, teoria regularității transportului optimal (și unde am fost entuziasmat de aventurile lui L, M și N din *Death Note*, dar asta-i altă poveste).

Când Marie Laforêt intonează *Pourquoi ces nuages*, cu nuanțele alea fără pereche din vocea ei fragilă și puternică totodată, mă văd din nou la Reading, în iarna lui 2003, explorând misterele hipocoercivității.

Un cântec fără titlu al lui Jeanne Cherhal mă aruncă înapoi în școala de vară de probabilități de la Saint-Flour, anul de grație 2005, când am câștigat turneul de ping-pong în uralele mulțimii.

Al doilea concert de Prokofiev, la a cărui a patra mișcare plâng întotdeauna – îl ascultam aproape zilnic la Atlanta, în toamna lui 1999, în timp ce lucram la prima carte despre transportul optimal.

Cu *Recviemul* lui Mozart mă trezeam în fiecare dimineață când dădeam examenul de *agrégé*, în 1994.

Iar *Impressions Baroques*, ale lui Pär Lindh Project, răsună pentru vecie pe fondul unei nopți islandeze de iarnă, după o expunere triumfală, în seara unui colocviu din 2005.

Experiențe încărcate deopotrivă cu speranța descoperirii și cu frustrarea imperfecțiunii, sau experiența unei demonstrații pe care-o simți că-ți scapă. Amestec de fericire și durere în cercetare, plăcerea de a te simți viu – pe care le acompaniază atât de bine muzica debordând de patimă.

În seara asta nu sunt altundeva, sunt chiar aici, la Princeton, și în efortul care m-așteaptă mă va însoți Ribeiro. Imposibil s-o găsesc în comerț, noroc cu Web-ul: cele câteva piese de pe site-ul ei Internet, apoi extraordinara selecție Long Box de pe musicMe.

Halucinantul *Poème Non Épique* e peste tot ce se poate imagina, e o bucată cu totul specială în istoria cântecului francez, dar e prea încărcat emoțional, mi se face părul măciucă doar când mă gândesc, pe așa ceva nu pot lucra.

Ascult, în schimb, minunatul *Jour de Fête*. Forță, sobrietate, emoție, putere evocatoare.

*Voiam să fiu altundeva
Altundeva nu era nicăieri...*

Urmează momentul meu favorit, în care vocea, până atunci reținută, începe să se desfășoare, să-și facă simțită forța. Vocea asta care face „să tresară morții, morții vii, și pe cei vii“.

*Nu-mi mai era foame nici sete
Poftă aveam doar de dragoste
Oriunde și oricum
Doar dragoste să fie
Dragoste chiar și plutind
Numai emoția s-o simt*

Muncește, Cédric, muncește. Ceaiul, ecuațiile, Ribeiro.

*...În seara aia ce de bolnavi
Se străduiau să facă dragoste
În cearșafurile zorilor macabre
Cu răsuflarea puturoasă de alcool...*

Of...

Cum se termină melodia, cum o pun din nou, iar și iar. Am nevoie de bucla asta ca să merg înainte. Muncește, Cédric, muncește.

*

Zi de sărbătoare (Catherine Ribeiro)

*Ziua cea mare sosise
Și sărbătoarea se pornise
În spatele fiecărei ferestre străluceau
Ghirlande lumânări și bomboane
În seara asta toți se străduiau
Să-și lase banii la casele
Magazinelor surprize peste surprize
Ziua marelui dezmăț –*

*Parisul scânteia de luminițe
Dar toată fința mea era absentă
Îmi tăiasse calea un satelit
Tare rău plasat pe-orbita mea
Ce dracu căutam eu pe trotuare
În buticurile duminicale
Căutând obiectul pseudo-rar
Căutând ultimul cadou –*

*Voiam să fiu altundeva
Altundeva nu era nicăieri...*

*Nu-mi mai era foame nici sete
Poftă aveam doar de dragoste
Oriunde și oricum
Doar dragoste să fie
Dragoste chiar și plutind
Numai emoția s-o simt –*

*Și telefonul n-a sunat
Clar că din vina companiei
Șampania nici n-avea gust
Vegheam ca să n-adorm
Timpul trecea frângându-mi inima
Iar ploaia bătea în caldarâm
Nimic nu e mai derizoriu
Decât un trup cald într-un pat pustiu –*

*În seara aia ce de bolnavi
Se străduiau să facă dragoste
În cearșafurile zorilor macabre
Cu răsuflarea puturoasă de alcool
Era Ziua cea Mare – Ziua Păcii
Din fundul Americilor mele
Visam la satelitul meu
Cel rău plasat pe-orbita mea –*



Capitolul 29

Princeton, 20 aprilie 2009

Cu ceașca de ceai în mână, bătrânul se întoarce spre mine și mă privește insistent, fără să scoată un cuvânt, evident derutat de stilul meu vestimentar neobișnuit.

E o scenă care mi-e familiară – oameni uimiți sau descumpăniți de costumele mele și de păianjenul pe care-l port. De obicei, îi privesc cu amuzată bunăvoință. Dar, de data asta, sunt cel puțin la fel de intimidat ca și cel care mă observă. Pentru că e vorba despre John Nash, poate cel mai mare analist al secolului, eroul meu matematic, născut în 1928. N-a primit medalia Fields și amărăciunea acestui eșec l-a măcinat zeci de ani. Sigur, a primit Premiul Nobel pentru economie pentru lucrările lui din tinerețe despre „echilibrele Nash“, care l-au făcut celebru în teoria jocurilor, economie, biologie. Dar ce a făcut ulterior e, pentru cunoscători, mult mai important: ar fi meritat una, două, trei medalii Fields.

În 1954, Nash a introdus scufundările neregulate, monstruo-zități care-ți permit să faci lucruri imposibile, cum ar fi să mototolești o minge de ping-pong fără să o deformezi, sau să construiești un inel perfect plat. *Nu putea fi adevărat și era adevărat*, a spus Gromov, care a înțeles opera geometrică a lui Nash mai bine decât oricine de pe planeta asta, și, plecând de la ea, a dezvoltat întreaga teorie a integrării convexe.

În 1956, acceptând provocarea unui coleg neîncrezător – Ambrose –, Nash a demonstrat că toate geometriile abstracte ale Prințului Riemann – Chopin al matematicii – pot fi realizate

la modul cel mai concret. A împlinit astfel un vis vechi de aproape o sută de ani.

În 1958, răspunzând unei întrebări puse de Nirenberg, Nash a demonstrat regularitatea soluțiilor ecuațiilor liniare parabolice cu coeficienți eliptici măsurabili – continuitatea în spațiu-timp a căldurii într-un solid complet omogen. A fost începutul teoriei moderne a ecuațiilor cu derivate parțiale.

Soarta a vrut ca geniul monastic Ennio De Giorgi să rezolve această problemă simultan cu Nash, printr-o metodă complet diferită; dar asta nu scade cu nimic meritul lui Nash.

Nash e unul dintre rarii oameni de știință în viață care a fost eroul unui film hollywoodian. Nu mi-a plăcut prea mult filmul, dar am apreciat mult biografia care i-a stat la bază. *John Nash, a Beautiful Mind*.

Dacă Hollywoodul a fost atras de Nash, asta nu s-a întâmplat numai din pricina realizărilor matematice ale acestuia, ci, mai ales, din pricina poveștii sale tragice. La 30 de ani a înnebunit. A petrecut în azil peste un deceniu, pentru a bântui apoi, ca o jalnică fantomă, culoarele Princetonului. Iar după trei decenii în purgatoriu, Nash a părăsit țărmlul nebuniei. Acum, la 80 de ani trecuți, e la fel de normal ca dumneavoastră și ca mine.

Doar că, deasupra lui, stăruie o aură pe care nici dumneavoastră, nici eu n-o avem, mărturiile unor realizări excepționale, lovituri de geniu și un mod de a decoji, de a analiza problemele care fac din Nash o figură tutelară pentru toți analiștii moderni, în orice caz pentru mine.

Cel care mă fixează e mult mai mult decât un om, e o legendă vie, iar eu n-am curaj să merg să-i vorbesc.

Data viitoare, voi îndrăzni să-l abordez și am să-i povestesc cum am făcut o expunere despre paradoxul lui Scheffer-Shnirelman, cu o demonstrație inspirată de teorema lui de scufundare neregulată. Am să-i vorbesc despre proiectul meu de conferință despre el la Biblioteca Națională a Franței. Poate că am să-i spun și că e eroul meu. Dar n-o să-i par ridicol?

În 1956, la New York, un vlăjgan împinge poarta unei uzine dezafectate, pe fațada căreia se poate citi Courant Institute of Mathematical Sciences. Ținuta sa mândră nu e cu nimic mai prejos decât a lui Russell Crowe, cel care-i va interpreta rolul la Hollywood, cincizeci de ani mai târziu. Numele său e Nash, are 28 de ani și e deja celebru în toată lumea pentru Echilibrele Nash pe care le-a inventat și pentru demonstrația Teoremei de Scufundare: lucrări scrise la Universitatea Princeton, apoi la Massachussets Institute of Technology. Vine la New York ca să descopere colegi și probleme noi.

Cea pe care i-o propune Louis Nirenberg îi captează atenția. O problemă care ține în șah cei mai buni specialiști... un adversar croit, poate, pe măsura lui! Continuitatea soluțiilor ecuațiilor parabolice cu coeficienți discontinui.

În 1811, marele Fourier determinase ecuația căldurii, cea care guvernează evoluția temperaturii în funcție de poziție și de timp într-un solid omogen în curs de răcire:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = C \Delta T.$$

De-atunci, ecuația sa a devenit una dintre cele mai reprezentative din clasa ecuațiilor cu derivate parțiale, ecuațiile acestea care descriu toate fenomenele continue care ne înconjoară, de la curenții marini până la mecanica cuantică.

Chiar dacă solidul e încălzit de manieră foarte neomogenă, impunând la un moment dat o temperatură care variază brusc și aleator dintr-un loc într-altul, e suficient să lăsăm solidul să se răcească o fracțiune de secundă și distribuția temperaturii devine regulată, variază într-un mod regulat. Fenomenul acesta, numit regularizare parabolică, e unul dintre primele pe care le învață studenții la cursul de ecuații cu derivate parțiale. Enunțul matematic corespunzător are o importanță care transcende cu asupra de măsură domeniul fizicii.

Dacă, în schimb, solidul e neomogen, format din materiale diferite, el va avea în fiecare poziție x o conductivitate $C(x)$

mai mare sau mai mică, adică se va răci mai ușor sau mai greu în acel punct. În consecință, ecuația devine

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (C(x) \nabla T).$$

Mai rămâne adevărată proprietatea de regularizare în acest context?

Spre deosebire de Nirenberg, Nash nu e specialist în ecuații, dar mușcă momeala. Săptămână de săptămână, vine la institut să stea de vorbă cu Nirenberg, îi pune întrebări.

La început, întrebările lui sunt naive, întrebări de novice. Nirenberg se gândește dacă nu cumva reputația lui Nash e exagerată. Când ești deja celebru și admirat, ai nevoie de curaj, nu glumă – sau de o doză neobișnuită de încredere în tine –, ca să pui întrebări de debutant într-un domeniu pe care încă nu-l stăpânești, ca să accepți ușoara ridicare din sprâncene, involuntar disprețuitoare, pe care riscă să o conțină răspunsul. Dar ăsta-i prețul ca să poți avansa... Și, treptat, întrebările lui Nash se precizează, devin mai pertinente, începe să se întrevadă ceva.

Apoi, stă de vorbă și cu alți colegi, de la unul obține informații, pe altul îl pune la treabă, unui al treilea îi propune o problemă.

Lennart Carleson, un analist suedez de mare talent, i-a vorbit despre Boltzmann și despre entropie. Carleson e unul dintre puținii matematicieni care cunosc bine subiectul; trebuie spus că a fost executorul testamentar intelectual al lui Torsten Carleman, primul matematician care s-a luat de piept cu ecuația lui Boltzmann. La moartea sa, Carleman a lăsat un manuscris neterminat pe tema ecuației, și i-a revenit lui Carleson sarcina de a-l completa și corecta. Așa a ajuns să afle despre noțiunea de entropie, iar acum a putut să-i împărtășească și lui Nash din ce știe.

Dar Boltzmann și Fourier nu seamănă deloc; entropia n-are nimic de-a face cu regularitatea!

Și totuși, în mintea lui Nash s-a aprins o luminiță, s-a schițat un plan de ansamblu. Fără să-și etaleze cărțile, tânărul matematician își continuă conversațiile, recuperează de-aici o lemă, de-acolo o propoziție.



John Nash

Și, într-o dimineață, lumea e silită să accepte evidența: combinând toate contribuțiile colegilor, Nash demonstrase teorema, ca un dirijor care pune fiecare muzician să-și interpreteze partitura.

În miezul demonstrației sale, stătea entropia care, sub conducerea sa, juca în contre-emploi un rol extrem de eficient. Maniera în care Nash folosea inegalitățile diferențiale în care apăreau anumite cantități, inspirate de o interpretare pe jumătate matematică, pe jumătate fizică, a creat un stil nou în tradiția căruia mă înscriu și eu.

Capitolul 30

Princeton, 4 mai 2009

Exact în clipa în care ceafa mea atinge mocheta, în corp se răspândește o stare de bine, pornește din cap și ajunge la picioare. E ora unu sau unu și jumătate, am revenit în birou după masa de prânz, e momentul cel mai bun pentru o ședință de relaxare.

Dar nu una violentă, ca aceea care-i chinuie pe colegii astrofizicieni din clădirea de-alături, ci o relaxare, ce-i drept, un pic crudă, fără nimic moale între mine și sol, în afara grosimii derizorii a mochetei din modestul meu birou. Derizorie, dar pe care ceafa o simte. M-am obișnuit așa, și-mi place contactul acesta din care lipsește moliciunea.

Imaginile defilează prin fața ochilor mei închiși, sunetele îmi țârlăie în urechi tot mai tare, în timp ce prin minte îmi trece din nou întreaga dimineață.

În dimineața asta, copiii de la școala primară Littlebrook au venit în vizită la Institut, au văzut lacul, minunații copaci înfloriți, bustul lui Albert Einstein din vechea bibliotecă. Priviți, copii, castelul fermecat al științei! La opt ani, nu e încă prea devreme pentru a visa la marii oameni de știință.

Le-am pregătit o expunere de douăzeci de minute, le-am vorbit despre mișcarea browniană, care permite punerea în evidență a atomilor, despre celebra problemă de la Syracuse*, atât de simplă încât o poate înțelege și un copil de opt ani, și

* E vorba despre Universitatea din Syracuse. (*N. t.*)

atât de complexă, încât și cel mai bun matematician din lume s-ar recunoaște pierdut în fața ei.

Au ascultat cumiți, în holul cel mare de la Institut, au făcut ochii mari în fața imaginilor minunate ale mișcării browniene care defilau pe laptopul meu. În ultimul rând, un blonduț cu ochii mari asculta și mai cuminte decât ceilalți; locuia aici de numai patru luni, dar n-avea nici o dificultate să înțeleagă *speech*-ul în engleză pe care tatălul îl rostea cu un puternic accent francez.

A urmat restul dimineții, apoi prânzul cel bun, iar apoi mintea mea a început să se înceteșeze – venise momentul să pun din nou contorul la zero, timpul pauzei-fulger, cea pe care o numesc *reboot*, repunerea în funcțiune a calculatorului, șterg memoria și o iau de la capăt.

E zgomot de fond în urechile mele, copiii vorbesc și vorbesc, și totul se-nvârte. Fața mea contractată se destinde, zgomotul se întetește, plutesc frânturi de fraze, unele mai puternice decât altele, voci și cântece, revine masa, o lingură uitată, o procedură de primire, un lac dezghețat, un bust din bibliotecă, $3n+1$, $3n+2$, $3n+3$, parchetul și umbrele, și ai uitat de un puști și...

Membrele îmi tresar brusc, umbrele se îndepărtează, conștiința mi se limpezește.

Stau la pândă, mai rămân culcat câteva clipe în care mii de furnici se răspândesc în tălpile picioarelor mele fără șosete.

Picioarele mi-au dispărut de pe radarul intern, sunt atât de grele, imposibil să le mișc. Ca în schiul de fond, când sub unul dintre schiuri s-a acumulat un strat gros de zăpadă.

Și totuși prima mișcare îmi redă ca prin farmec picioarele, sunt iarăși întreg. Pauza s-a terminat, a durat exact zece minute pe ceas, iar acum sunt un matematician nou.

Pornește un nou Cédric. Mă arunc iarăși în calcule și în articolul ăsta despre amortizarea Landau, vechi de cincizeci de ani și încă atât de actual, pe care tocmai l-am recuperat de la bibliotecă. Până la ceai, mai sunt două ore de muncă intensă.

*

Problema de la Syracuse, sau problema lui Collatz, sau problema $3n+1$, e una dintre enigmaticele nerezolvate cele mai celebre din toate timpurile. N-a declarat însuși Paul Erdős că matematica epocii noastre nu e încă pregătită să înfrunte asemenea monștri?

Tastați „ $3n+1$ ” într-un motor de căutare Internet și o să dați ușor de conjectura blestemată, simplă și obsedantă ca un refren popular.

Luați un număr întreg, indiferent care, să zicem 38.

E par, așa că-l împart la 2, obțin 19.

Am găsit un impar, îl înmulțesc cu 3 și adaug 1, obțin $19 \times 3 + 1 = 58$.

Ultimul găsit e par, îl împart la 2...

Și așa mai departe, trec de la un număr la altul după o regulă simplă: de fiecare dată când dau peste un număr par împart la 2, de fiecare dată când dau peste un număr impar înmulțesc cu 3 și adaug 1.

În exemplul în care am pornit cu 38 vom găsi succesiv: 19, 58, 29, 88, 44, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, 4, 2, 1, 4, 2, 1, 4, 2, 1...

E clar că, de îndată ce am dat peste 1, știm ce urmează: 4, 2, 1, 4, 2, 1, 4, 2, 1, ad calculam aeternam.

De fiecare dată, în toată istoria omenirii, când s-a făcut calculul acesta, s-a ajuns la 4, 2, 1. Putem trage concluzia că așa va fi întotdeauna, oricare ar fi numărul care servește drept punct de pornire?

Evident, cum există o infinitate de numere întregi, nu le putem testa pe toate. În zilele noastre, cu calculatoare de

buzunar, calculatoare și supercalculatoare, s-au făcut miliarde și miliarde de încercări și, de fiecare dată, s-a ajuns la implacabilul 4, 2, 1.

Fiecare e liber să încerce să demonstreze că e vorba despre o regulă generală. Așa se crede, dar nimeni nu știe s-o demonstreze: e o conjectură. Matematica e democratică, și oricine va reuși să demonstreze sau să infirme conjectura asta va fi întâmpinat ca un erou.

E sigur că nu eu voi încerca: în afară de faptul că pare îngrozitor de dificilă, nu se potrivește cu mintea mea care nu e antrenată să analizeze asemenea probleme.

*

Date: Mon, 4 May 2009 17:25:09 -0500
 From: Cedric Villani <Cedric.VILLANI@umpa.ens-lyon.fr>
 To: Clement Mouhot
 <clement.mouhot@ceremade.dauphine.fr>
 Subject: Backus

Uite articolul lui Backus din JMP 1960 (Vol.1, No.3, pacat ca n-a fost Vol.1, No.1, ar fi fost si mai fain).

E fantastic! Uita-te la penultima sectiune din articolul lui Backus, apoi la ultima fraza a articolului! E cu atat mai remarcabil cu cat nu stiu pe nimeni care sa fi exprimat explicit asemenea dubii pana la articolele din ultimii ani...

Numai bine
 Cedric

From: Clement Mouhot
 <clement.mouhot@ceremade.dauphine.fr>
 To: Cedric Villani <Cedric.VILLANI@umpa.ens-lyon.fr>
 Date: Sun, 10 May 2009 05:21:28 +0800
 Subject: Re: Backus

Am citit un pic articolul lui Backus in avion. Intr-adevar, e foarte interesant, intelesese bine pb cazului liniar si problema cresterii in timp a termenului de background de indata ce depinde de spatiu, prin filamentare. Si in general e remarcabil de riguros fata de „standardul” articolelor despre Landau damping... Trebuie sa-l adaugam la citari, mai ales cu discutia sa numerica de la pagina 190 si cu concluzia cu dubiile privind validitatea neliniara a studiului liniar: intareste una dintre dificultatile conceptuale ale introducerii noastre.

Numai bine, Clement

Capitolul 31

Princeton, într-o frumoasă seară de mai 2009

În mai, la Institute for Advanced Studies, copacii înfloresc, e o minune.

Noaptea abia s-a lăsat, răătăcesc singur prin întuneric, bucurându-mă de obscuritate, de senzația de pace, de dulceața aerului.

Elev la École Normale Supérieure, îmi plăcea să umblu noaptea pe culoarele în beznă ale internatului, doar câteva raze de lumină filtrând de sub uși, ca vagile luminiscente pe care ți le imaginezi trecând prin hublourile unui submarin din Jules Verne.

Dar aici, cu iarba și cu briza, e incomparabil. Sunt și lumini, dar nu lumini civilizate, sunt luminile naturale ale licuricilor, nenumărate stele pulsante aruncate în iarbă.

Și îmi amintesc că, într-un articol pe care l-am citit, teoria amortizării Landau e aplicată tocmai licăririi licuricilor.

Fir-ar să fie, Cédric! Mai lasă naibii amortizarea Landau! I-ai dat deja atâtea zile și nopți. Bucură-te și tu de licurici fără să-ți mai pui întrebări.

Ia te uită! Cine se plimbă la ora asta pe-aici? Recunosc silueta asta... Ce chestie! Vladimir Voevodsky, matematician rus, printre cei mai străluciți din generația lui, Medalie Fields în 2002, unul dintre moștenitorii spirituali ai lui Grothendieck. E genul de întâlnire neplăcută pe care o poți avea seara târziu la Princeton.

Și Voevodsky e la plimbare. *Walking, just walking, walking for air*, fără nici un scop, ca pietonul lui Ray Bradbury.

Intrăm în vorbă. E greu de imaginat cineva care să facă o matematică mai diferită de a mea decât Voevodsky. Nu pricep o iotă din preocupările lui, reciproca fiind probabil la fel de adevărată. Dar, decât să încerce să-mi povestească despre ce a făcut, îmi vorbește despre visurile lui, despre un subiect care-l pasionează și în care are de gând să se implice cu totul, limbajele expert și demonstrațiile automate.



Vladimir Voevodsky

Vorbește despre celebra Teoremă a celor Patru Culori, despre demonstrația ei controversată pentru că folosirea informaticii a făcut-o inumană, dar care a fost recent bulversată de cercetătorii francezi de la INRIA cu ajutorul limbajului expert Coq.

Vladimir crede că, într-un viitor nu foarte îndepărtat, programele de informatică vor putea verifica raționamente lungi și complexe, spune că deja se experimentează, în Franța, pe rezultate celebre. La început sunt sceptic, dar cel cu care vorbesc nu e doar o minte înfierbântată, e un om de știință de cel mai înalt nivel, ce spune trebuie luat în serios.

Eu nu m-am atins niciodată de asemenea probleme, iar algoritmica aproape n-am practicat-o. Algoritmii de mariaj (*bipartite matching*), simplex, de licitație joacă un rol important în simularea numerică a transportului optimal în care sunt specialist; dar e o perspectivă complet diferită de cea despre care îmi vorbește Vladimir. Domeniul ăsta nou e foarte tentant, sunt atâtea lucruri pasionante de studiat.

Flori, limbaje, patru culori, împerechere... Toate ingredientele pentru un cântec frumos... Numai să nu fi fost deja compus...

*

Pe la 1850, matematicianul Francis Guthrie a colorat harta comitatelor Angliei, având mare grijă ca oricare două comitate cu o porțiune de frontieră comună să aibă culori diferite. Câte creioane colorate urma să folosească?

Guthrie și-a dat seama că-i sunt de ajuns patru culori. Și și-a zis că e posibil să fie de ajuns patru pentru a colora orice hartă – una care conține, desigur, țări care nu sunt ele însele împărțite în zone separate.

Trei culori nu ajung: luați harta Americii de Sud și uitați-vă la Brazilia, Argentina, Bolivia și Paraguay, fiecare dintre ele le atinge pe celelalte trei, vă trebuie deci cel puțin patru culori diferite.

Dar patru sunt de-ajuns, vă puteți convinge colorând harta dumneavoastră preferată. Sau, cel puțin, puteți testa afirmația pe o mulțime de exemple. Dar cum să arăți că e adevărat pentru orice hartă? N-ai cum să le testezi pe toate, sunt o infinitate! E nevoie de un raționament logic, și nu e ușor.

În 1879, Kempe credea că a demonstrat rezultatul. Dar demonstrația era greșită, el arătase doar faptul că cinci culori sunt de-ajuns.

S-o luăm încet. Știm s-o facem pentru o hartă cu patru țări. De-aici la cinci, se trece ușor. Apoi pentru șase. Putem continua?

Să zicem că știm să colorăm cu patru culori toate hărțile cu 1 000 de țări și că vrem să ne apucăm de o hartă cu 1 001 de țări. Cum procedăm? Pentru început, putem arăta că printre cele 1 001 de țări, există măcar una care are vecini puțini, să zicem maxim 5. Dacă ne concentrăm asupra acestei țări și a vecinilor ei, colorăm ușor; și dacă ne jucăm de-a cuceritorii, făcând câteva fuziuni și recombinații în sânul acestui grup de țări, ne vom afla în fața unei hărți cu mai puțin de 1 000 de țări, deci vom ști cum să colorăm. Bună idee! Dar e greu să potrivim colorarea locală cu cea globală, trebuie avute în vedere foarte multe cazuri: milioane, ba chiar miliarde!

În 1976, Appel și Haken au redus problema la o mie de configurații care trebuiau testate și le-au trecut în revistă pe toate cu ajutorul unui program informatic. După ce mașina a lucrat timp de două luni, au tras concluzia că patru culori sunt întotdeauna de ajuns, rezolvând o conjectură mai veche de un secol.

În fața acestei demonstrații, comunitatea matematică a fost profund divizată. Oare mașina nu a ucis reflecția? Înțelegem cu adevărat argumentul acesta care alimentează o ființă din siliciu și circuite integrate? Appel-Haken-arzii și anti-Appel-Haken-arzii se războiesc fără a putea ajunge la consens.

Oamenii s-au obișnuit cu polemica asta. Acum facem un salt în timp, pentru a reveni în Franța, la INRIA (Institutul Național de cercetare în Informatică și Automatică), la cum-păna milenilor. Georges Gonthier, specialist în limbaje de verificare a demonstrațiilor, e cercetător la acest institut specializat în informatică și calcul. Domeniul său a fost dezvoltat în Europa de câțiva teoreticieni visători, cam în aceeași perioadă în care Appel și Haken erau cap de afiș. Limbajele acestea verifică o demonstrație matematică așa cum se testează soliditatea unui arbore, ramură cu ramură: imaginați-vă un arbore logic care conține raționamentul și poate face obiectul unei verificări automate, pe modelul unui corector ortografic.

Dar, în timp ce un corector ortografic ia în calcul doar cuvintele individuale, programul care analizează demonstrațiile verifică dacă ansamblul e coerent, are grijă ca totul să fie corect.

Cu ajutorul unui colaborator, Benjamin Werner, Gonthier se hotărăște să se înhame la demonstrația Teoremei celor Patru Culori într-un limbaj numit Coq, în onoarea creatorului său, Thierry Coquand. Spre deosebire de programele folosite de Appel și Haken, Coq e certificat: se știe că nu poate produce erori. În plus, Coq nu furnizează calcule, ci generează automat demonstrația plecând de la algoritmul care îi este impus. Gonthier îl folosește ca să rescrie partea „lizibilă” a demonstrației și obține ceva simplu și eficient, ceva frumos! O demonstrație scrisă de o ființă omenească în proporție de 0,2%, completată de mașină până la 100% – dar cel mai mult contează cele 0,2% umane, datorită lui Coq știm că putem avea încredere în celelalte părți.

Lucrările lui Gonthier și ale colegilor săi prefigurează softurile de validare care, într-un viitor nu foarte îndepărtat, vor putea verifica automat programele complexe care guvernează lansarea rachetelor, zborul avioanelor sau microprocesoarele de pe laptopurile noastre. Miza financiară a ceea ce acum treizeci de ani nu era decât o dulce visare se socotește azi în miliarde de euro.

Cât despre neobositul Gonthier, s-a lansat acum într-un proiect extrem de ambițios, verificarea unor teoreme de clasificare a grupurilor finite ale căror demonstrații sunt cunoscute ca unele dintre cele mai lungi din secolul XX.

*

*Un cuvânt scrâșnind
Printre dinți scuipat
Și-n lume se-aprind
Flăcări ca în iad*

*Guri se cască mare
Scot vorbe mieroase
Pielea-i de vânzare
De pe tobe roase*

*Când în nou limbaj
Vom vorbi de flori
Și de mariaj
De patru culori
Tu vei înțelege
Limba dragostei
Eu s-aștept voi merge
Lângă Turnul ei*

*Între timp, Cain îl tot vânează pe Abel
Dar eu am construit cu mâinile mele Turnul din Babel*

Turnul din Babel (extras), Guy Béart

Capitolul 32

Princeton, 26 iunie 2009

E ultima mea zi la Princeton. A plouat atât de mult în ultimele săptămâni, ca-ntr-o comedie bufă. Dar astă-seară, cerul s-a degajat și pot să mă plimb din nou. Licuricii transformă copacii cei mari în romantici brazi de Crăciun împodobiți cu nenumărate lumânările sclipitoare. Ciuperci uriașe, un iepuraș sperios, silueta unei vulpi care se decupează o clipă în noapte, cerbi al căror boncăluit te înfioară.

În ultima vreme s-au întâmplat multe pe frontul amortizării Landau! Am reușit în sfârșit să facem demonstrația să stea în picioare, am recitat totul. Ce emoție când ne-am pus articolul *on line* pe Internet! Am putut în fine să controlăm modul zero, iar Clément a descoperit că puteam renunța complet la artificul pe care-l introdusesem la întoarcerea de la Muzeul de Istorie Naturală, dublul decalaj temporal. Dar tot n-aveam inimă să luăm totul de la capăt; și-apoi, ne-am zis că trucul ar putea fi util în alte probleme, așa că l-am lăsat, oricum nu făcea rău nimănui... Va fi oricând posibil să mai simplificăm, la nevoie.

Am expus lucrările noastre în multe locuri; de fiecare dată am reușit să îmbunătățesc rezultatele și prezentarea, acum e bine rodată și e solidă. Se poate să mai fie vreun *bug* pe unde, dar acum totul se leagă atât de bine, încât sunt încrezător: dacă se descoperă o eroare, nu poate fi gravă, o vom putea repara.

La Princeton Plasma Physics Laboratory, am vorbit timp de două ore în fața unui public de fizicieni, apoi am avut

dreptul la o minunată vizită a instalațiilor și a locurilor unde își fac ei experiențele, în acest institut unde se încearcă descifrarea misterelor plasmei și – cine știe? – stăpânirea fuziunii nucleare.

La Minneapolis, expunerea mea l-a impresionat foarte tare pe Vladimir Šverák. Îl respect enorm pe acest om care a înțeles misterioasa noțiune de cvasiconvexitate mai bine decât oricine altcineva și care e acum unul dintre cei mai buni specialiști în regularitatea Navier-Stokes; cuvintele lui calde mi-au dat multă încredere.

În plus, la Minneapolis am făcut o cucerire: foarte tânără, foarte blonda și foarte timida fetiță a colegului meu Markus Keel a binevoit să se joace cu mine în timpul banchetului colocviului, mergând până la a se da peste cap râzând în hohote. Lui Markus nu-i venea să creadă că fetița lui, care nu vorbește niciodată cu necunoscuți, a acceptat o asemenea fraternizare cu un străin.

Mi-am prezentat din nou rezultatele și la Rutgers, la unul din colocviile de fizică statistică ale neobositului Joel. Dar de data asta a fost complet diferit față de precedentul expozeu, acum era ceva solid!

La Princeton, am făcut o expunere în fața unei săli pline ochi numai cu fete, sau aproape, în cadrul programului „Women in Mathematics“. Aceste Tinere Matematiciene vin în număr mare, în speranța de a înlătura blestemul care face din matematică o disciplină preponderent masculină – ce-i drept, mai puțin decât informatica sau ingineria electrică. Poate că printre ele se află urmașele marilor matematiciene care au făcut să viseze generații la rând, Sofia Kowalevskaya, Emmy Noether, Olga Oleinik sau Olga Ladîjenskaia. Tinerele care au invadat campusul aduc un aer de prospețime, unele au rămas până seara, era deja răcoare și ele se plimbau în grupuri mici.

Aseară am mers cu toții să ne luăm rămas-bun de la terenul de golf. Ce mult îmi plăcea, când mă-ntorceam de la vreo

conferință, pe drumeagul care duce de la gara mică până la Institut, să traversez terenul ăsta, singur în noapte, sub razele lunii care prefăce colinele în valuri fantomatice... Copiii au depus cu religiozitate pe jos o comoară prețioasă: toate mingile de golf pierdute pe care le-au adunat de când au ajuns aici. S-au și făcut șase luni!

Starea mea de grație matematică a durat tot timpul sejurului la Princeton. După ce am rezolvat problema amortizării Landau, am revenit la celălalt mare program în desfășurare, cu colaboratorii mei Ludovic și Alessio, și iarăși, atunci când totul părea compromis, am reușit să trecem peste toate obstacolele și, ca prin farmec, totul s-a pornit să funcționeze. Printr-un adevărat miracol, un calcul enorm de cincisprezece termeni care s-au combinat pentru a forma un pătrat perfect... un miracol pe cât de nesperat, pe atât de neașteptat, pentru că, în definitiv, am demonstrat exact contrariul a ce credeam că vom demonstra!

Dar în amortizarea Landau n-am demonstrat chiar totul: pentru interacțiile electrostatice sau gravitaționale, cele mai interesante, am arătat că amortizarea apare după un timp uriaș, dar nu infinit. Și cum aici nu prea avem loc de ntors, e impusă și regularitatea așa că nu reușim să ieșim din cadrul analitic. La sfârșitul expunerilor mele, revine adesea una sau alta din următoarele două întrebări: *Dar în cazul interacțiilor coulombiene ori newtoniene, avem și acolo amortizare în timp finit? Se poate renunța la ipoteza de analiticitate?* De fiecare dată răspund că nu voi spune nimic în absența avocatului meu, că adevărul e că nu știu dacă e ceva profund sau am fost noi prea puțin dibaci.

Oh, uite o Tânără Matematiciană care hoinărește de una singură, la fel ca mine, și e bucuroasă să mă însoțească pentru restul plimbării. A asistat la conferința mea despre transportul optimal, e o bună introducere, o să vorbim despre matematică în blânda noapte princetoniană.

Plimbarea e gata, trebuie să mă întorc la Institut. Biroul meu e aproape gol, mai e doar teancul de ciorne, teancul enorm, înnegrit în fiecare zi cu toate încercările avortate și reușite, toate versiunile intermediare pe care le-am scris îngrijit, le-am imprimat degrabă și le-am corectat cu furie.

Le-aș fi luat pe toate, dar ar fi greu cu ele în avion, suntem și-așa foarte încărcăți! Trebuie deci să arunc tot...

Văzându-mă contemplând ciornele care tind să ocupe tot locul, Tânăra Matematiciană înțelege imediat mica dramă a aruncării acestui teanc de foi îmbibate de emoții. Mă ajută să îndes totul în coșul pentru hârtii.

Mai degrabă, de jur-împrejurul coșului – ar fi de-ajuns ca să umpli patru coșuri!

Gata, sejurul meu la Princeton chiar a luat sfârșit.

*

Am fost foarte multă vreme circumspect față de principiul conferințelor tinerelor matematiciene... asta până când am participat chiar eu la una, ca orator, ediția 2009 a programului „Femei în matematică”, organizat în fiecare an la Institute for Advanced Studies din Princeton. Ambianța dinamică și entuziastă care scâldea această manifestare mi-a lăsat o amintire greu de uitat. Vă urez să purtați dezbaterile și discuțiile celui de-al „nouălea forum al tinerelor matematiciene la Institutul Henri Poincaré” într-o atmosferă la fel de destinsă și studioasă. Fiți bine-venite în „Casa Matematicienelor”!

(Cuvânt de bun-sosie la Forumul Tinerelor Matematiciene, întâmpinate la Institutul Henri Poincaré de directorul lui pe 6 noiembrie 2009.)

Capitolul 33

Lyon, 28 iunie 2009

Ce ciudat să revii la matcă după atâta vreme!

N-am simțit că ne-am întors cu adevărat decât după ce am fost la piață. Ne-am regăsit negustorii, ne-am ales pâinea și brânzeturile, ne-am mirat să auzim numai franceză în jur. Mi-au dat lacrimile când am băut un pahar de lapte nepasteurizat, primul după șase luni. Frageda *ciabatta* și bagheta crocantă nu mai au nevoie de comentarii.

M-am întors în elementul meu, dar nimic nu mai e ca înainte. Sigur, au fost meșteri care au lucrat cât timp am fost plecați, și abia mai recunoaștem apartamentul... Dar asta nu-i nimic; mai importantă e metamorfoza mea lăuntrică. Munca de la Princeton m-a transformat, ca pe un alpinist care, când coboară la sol, are mintea încă plină de înălțimile pe care le-a explorat. Hazardul mi-a deviat traiectoria științifică până la un punct de neimaginat acum șase luni.

Anii 1950 au fost martorii unei revoluții științifice, atunci când s-a înțeles că, pentru a explora un sistem prea bogat în posibilități, e adesea preferabil să te deplasezi la întâmplare în loc să-l caroezi metodic ori să alegi eșantioane succesive într-o manieră perfect aleatoare. Era algoritmul Metropolis-Hastings, azi e întreg domeniul MCMC, Monte Carlo Markov Chains, a cărui eficacitate, dincolo de orice așteptări raționale în fizică, chimie sau biologie, încă n-a fost explicată. Nu e o explorare deterministă, nu e nici una complet aleatoare, e o explorare printr-o avansare întâmplătoare.

De fapt, nu e ceva nou, așa-i și-n viață: trecând un pic la întâmplare de la o situație la alta, explorăm cu atât mai multe posibilități, ca un cercetător care-și schimbă continentul științific în funcție de întâlniri.

Toate s-au întors la locul lor, toate se vor porni din nou. Lucrurile mele sunt deja aranjate în cutii, foarte curând, firma de mutări va lua tot ce mi-e familiar. Futonul* pe care mama l-a comparat cu betonul armat după ce l-a încercat. Linia muzicală care, la vârsta ei de cincisprezece ani, își merită din plin eticheta de *high fidelity*. Sutele de CD-uri care-mi mâncau uneori întreg salariul de normalian, casetele recuperate și vinilurile de ocazie. Și biroul dublu, mare, din lemn masiv, bibliotecile coloniale în care se înghesuie cărți nenumărate, fotoliul greu de lemn dintr-o singură bucată, adus de la Londra, sculpturile cumpărate în Drôme, tablourile bunicului... Toate mă vor însoți în noua aventură: peste trei zile îmi încep mandatul de director al Institutului Henri Poincaré din Paris. Predecesorul meu eliberează biroul pe 30 iunie, eu mă instalez pe 1 iulie. Va trebui să învăț ce am de făcut la fața locului, începe o nouă perioadă din viața mea.

*

Un nou pas din MCMC-ul personal.

*

După o lungă eclipsă în anii 70 și 80, IHP, „Casa Matematicii”, renaște în mod oficial în 1990. Statul investește masiv în renovarea sa, în cadrul unui contract cvadrienal încheiat cu Universitatea Pierre și Marie Curie, însărcinată cu gestiunea noului IHP, și cu sprijinul CNRS.

Noua structură începe să funcționeze sub direcția matematicianului Pierre Grisvard, care moare prematur în 1994,

* Saltea care se pune direct pe podea. (N. t.)

la câteva luni după ce ministrul învățământului superior și al cercetării inaugurase oficial institutul. Îi urmează Joseph Oesterlé (Universitatea Pierre și Marie Curie), apoi Michel Broué (Universitatea Denis Diderot) în 1999, apoi Cédric Villani (Școala Normală Superioară din Lyon) în 2009.

(Extras dintr-o notă de sinteză despre Institutul Henri Poincaré.)

Capitolul 34

Praga, 4 august 2009

Praga, orașul Europei mitice – dacă există așa ceva. Legenda Golemului, cântecul lui Messia, biografia lui Kafka desenată de Crumb și Mairowitz, toate acestea și multe altele încă îmi răsună-n minte în timp ce străbat străzi pe care orologii milenare se învecinează cu barurile pline de dansatoare sumar îmbrăcate și unde studenții se duc să danseze costumați în cape de supereroi sau cu coarne de diavoli.

Acum câteva săptămâni, pe drumul dinspre Oberwolfach, trecătorii făceau ochii mari la vederea costumului meu; la Praga, aş putea trece drept expert contabil.

Ieri s-a deschis Congresul Internațional de Fizică Matematică, organizat de asociația cu același nume. Am fost patru cei care am primit, cu tot fastul, premiul Henri Poincaré, cu siguranță cea mai înaltă distincție internațională în fizica matematică. În afara austriacului Robert Seiringer (categoria junior, ca și mine), printre laureați mai erau elvețianul Jürg Frölich și rusul Yakov Sinai. Acești specialiști în mecanica cuantică și clasică, în fizica statistică și în sisteme dinamice sunt cu toții prieteni, iar clarvăzătorul Joel Lebowitz i-a integrat de mult pe toți în comitetul editorial al *Journal of Statistical Physics* pe care-l conduce. Sunt fericit și mândru să mă aflu în asemenea companie.

Primirea acestui premiu îmi dă dreptul la o conferință plenară la Congres, chiar dacă inițial nu fusesem programat. Cu toate că am primit premiul Poincaré pentru lucrările despre

Boltzmann, am ales să vorbesc despre amortizarea Landau: e o ocazie nesperată să fac cunoscute rezultatele recente în fața celei mai bune audiențe imaginabile de fizică matematică.

Cu trei minute în urmă, înainte să încep conferința, inima îmi bătea nebunește iar prin vene îmi curgeau șuvoaie de adrenalină. Dar, de îndată ce-am început să vorbesc, m-am liniștit și am devenit sigur de mine.

— It so happens that I was appointed Director of the Institut Henri Poincaré, at the same time that I receive the Henri Poincaré prize. This is just a coincidence, but I like it...

Expunerea, pregătită cu multă grijă, se desfășoară bine, termin la fix.

— ...To conclude, let me note the nice coincidence! In order to treat the singularity of the Newton interaction, you use the full power of the Newton scheme. Newton can be proud! This is just a coincidence, but I like it.

Primirea e triumfală, în unele priviri citesc un amestec de uimire și admirație, cu o umbră de teamă – trebuie spus că demonstrația intimidează, chiar și pe mine mă depășește!

Și-apoi sunt fetele, tinerele din Praga, înainte de conferință se uitau la mine fără să-mi dea prea mare atenție – după, e cu totul altceva, se înghesuie, mă felicită pentru claritatea expunerii; una dintre ele recită emoționată, într-o franceză ezitantă, un mic compliment.

Sigur, revin și întrebările obișnuite, aceleași de fiecare dată. Se poate relaxa regularitatea analitică? La o interacție newtoniană, nu se poate ajunge la timp infinit? Dar asta nu-l îngrijorează pe prietenul meu portughez, Jean-Claude Zambrini, care, la sfârșitul expunerii, îmi șoptește: „Dacă tot atragi tu coincidențele, Cédric, tot ce ți se poate ura acum e să obții o invitație la Fields Institute!“

Institutul Fields – care nu joacă nici un rol în atribuirea medaliilor omonime – are sediul la Toronto și organizează cu regularitate colocvii pentru tot felul de matematicieni.

Mă amuz cu Jean-Claude... dar după doar o lună, pură coincidență!, invitația sosește.

*

Date: Tue, 22 Sep 2009 16:10:51 -0400 (EDT)
From: Robert McCann <mccann@math.toronto.edu>
To: Cedric Villani <Cedric.VILLANI@umpa.ens-lyon.fr>
Subject: Fields 2010

Dear Cedric,

Next fall I am involved in organizing a workshop on "Geometric Probability and Optimal Transportation" Nov 1-5 as part of the Fields Theme Semester on "Asymptotic Geometric Analysis".

You will certainly be invited to the workshop, with all expenses covered, and I hope you will be able to come. However, I also wanted to check whether there is a possibility you might be interested in visiting Toronto and the Fields Institute for a longer period, in which case we would try to make the opportunity attractive. Please let me know.

Robert

Capitolul 35

New York, 23 octombrie 2009

În Franța, copiii fac cunoștință cu puiul de mistreț prins de unchiul lor cu mâinile goale. Ce mult mi-ar fi plăcut să-l văd!

Dar am preferat să-mi folosesc vacanța ca să fac loc unui foarte obositor turneu american care mă duce de-a lungul și de-a latul Statelor Unite în doar câteva zile. Am trecut deja prin Boston, ca să vizitez MIT (pe urmele lui Wiener și Nash!) și Universitatea Harvard. Acum sunt la New York. Mă consolez spunându-mi că, de îndată ce mă voi întoarce în Franța, am să merg să văd puiul de mistreț și am să-l duc la plimbare în pădure.

E seară, îmi deschid poșta electronică. Îmi sare inima: un mesaj de la *Acta Mathematica*, o revistă de cercetare matematică pe care mulți o consideră drept cea mai prestigioasă dintre toate. Aici am propus spre publicare, Clément și cu mine, monstrul nostru de 180 de pagini. Sigur despre asta e mesajul.

Dar... l-am trimis acum mai puțin de patru luni! Ținând cont de mărimea manuscrisului, e mult prea devreme ca referenții să-și fi dat avizul și ca editorii să fi luat o decizie pozitivă. O singură explicație posibilă: revista ne scrie pentru a anunța că articolul e respins.

Deschid mesajul, citesc în diagonală, mă uit febril pe rapoartele experților. Strâng din dinți și le mai citesc o dată. Șase rapoarte, în mare foarte pozitive, foarte orice, dar... da, ca-ntotdeauna, îi îngrijorează analiticitatea și cazul limită la

timp mare. De fiecare dată, aceleași două întrebări cărora a trebuit deja să le răspund de zeci de ori în expunerile pe care le-am făcut, și din pricina cărora, iată, acum mi se respinge manuscrisul! Editorul nu e convins că rezultatele sunt definitive, iar articolul e atât de lung, încât se vede nevoit să fie încă mai intransigent decât de obicei.

Ce nedreptate! În ciuda noutății conținute în articol, a defrișării complete a subiectului? Am trecut peste atâtea obstacole tehnice, am petrecut atâtea nopți nedormite... și tot nu e destul de frumos pentru ei?? Sunt bolnav!

Ia te uită... un alt mesaj mă anunță că am câștigat premiul Fermat. După numele matematicianului francez Pierre de Fermat, prințul amatorilor, care, în secolul XVII, înfuria toată Europa cu enigmele sale matematice. A revoluționat teoria numerelor, calculul variațiilor și calculul probabilităților; azi, premiul Fermat e primit o dată la doi ani de unul sau doi cercetători care încă n-au împlinit 45 de ani și care au contribuții majore în unul dintre aceste domenii.

Vestea acestui premiu face să-mi sară inima din piept, dar tot nu ajunge ca să compenseze frustrarea de a-mi vedea articolul respins. Ca să mă aline, aș avea nevoie măcar de o îmbrățișare caldă.

*

În 1882, matematicianul suedez Gösta Mittag-Leffler își convingea colegii nordici să înființeze împreună o revistă scandinavă de matematică, dedicată cercetării la nivel înalt. Avea să fie Acta Mathematica, al cărei redactor-șef urma să devină Mittag-Leffler.

Comunicând regulat cu cei mai buni matematicieni din lume, înzestrat cu un gust foarte sigur și cu o bună doză de îndrăzneală, Mittag-Leffler a reușit repede să atragă cele mai bune articole de matematică ale momentului. În manejul său de autori, mânzul preferat e, cu siguranță, genialul și imprevizibilul

Henri Poincaré, căruia lui Mittag-Leffler nu-i e frică să-i publice lungi articole revoluționare.

Episodul cel mai celebru din viața revistei coincide cu unul dintre episoadele cele mai celebre din cariera lui Poincaré. La sfatul lui Mittag-Leffler, regele Oscar al II-lea al Suediei lansase un mare concurs de matematică, pe o temă la alegere dintr-o listă scurtă. Poincaré acceptase provocarea și alesese să trateze subiectul stabilității sistemului solar, problemă rămasă deschisă încă de la Newton! Într-adevăr, dacă Newton scrisese ecuațiile planetelor din sistemul solar (planetele sunt atrase de Soare și se atrag unele pe altele), a fost incapabil să arate că aceste ecuații atrag după ele stabilitatea sistemului solar, sau să decidă că, dimpotivă, ele conțin o catastrofă anunțată – ciocnirea planetelor, cine poate ști? În fizica matematică, toată lumea cunoaște această problemă.

Newton credea că sistemul e stabil în mod intrinsec, și că stabilitatea pe care o observăm se datorează unei miiloase mâini divine. Dar, mai târziu, Laplace și Lagrange, apoi Gauss, au arătat că sistemul lui Newton e stabil într-un timp uriaș, poate un milion de ani, mult mai mult decât credea chiar Newton. Era pentru prima dată în istoria omenirii când comportarea astrelor la o scară de timp mult superioară tuturor arhivelor ținute vreodată era prezisă din punct de vedere calitativ!

Dar întrebarea rămânea: dincolo de acest timp uriaș, catastrofa se poate produce sau nu? Peste nu unul, ci o sută de milioane de ani, nu riscă Marte și Pământul să se ciocnească? În spatele acestei probleme se află întrebări fundamentale privind fizica în general.

Poincaré nu tratează sistemul solar complet – era prea complicat! În schimb, consideră un sistem solar redus și idealizat, numărând numai două planete care se rotesc în jurul Soarelui, una dintre ele fiind minusculă în raport cu cealaltă.

Într-un fel, ca și cum am uita de toate planetele în afara lui Jupiter și a Pământului... Poincaré a studiat problema asta epurată, a simplificat-o și mai mult, până a ajuns la miezul ei viu. A inventat metode noi cu ocazia asta și a demonstrat stabilitatea veșnică a acestui sistem redus!

Realizarea aceasta i-a adus gloria și recompensa regelui Oscar.

Manuscrisul câștigător urma să fie publicat în Acta Mathematica. Dar asistentul care edita textul avea probleme cu câteva pasaje mai confuze din soluția lui Poincaré. Nimic mai banal: toată lumea știa că Poincaré nu era un model de claritate. I-a comunicat nedumeririle sale monumentului matematicii franceze.

Până să-și dea seama Poincaré că în demonstrația lui se strecurase o eroare gravă, articolul era deja publicat! O erată nu mai era de-ajuns, rezultatele din articol erau contaminate în profunzime.

Netulburat, Mittag-Leffler retrage toate exemplarele publicate deja, unul câte unul, sub diverse pretexte futele, înainte să-și dea seama cineva de eroare. Topește totul, sau aproape totul. Cheltuielile au fost plătite de Poincaré – l-a costat mai mult decât promise de la regele Oscar!

Ce face povestea extraordinară e că Poincaré și-a transformat eroarea în act fondator. A reușit să refacă totul, și-a schimbat concluziile, a descoperit că demonstrase contrariul concluziei în care crezuse: instabilitatea e posibilă!

Corectat, republicat, articolul a fost textul fondator al teoriei sistemelor dinamice, o teorie cu care se ocupă azi mii de cercetători din toată lumea. Teoria haosului, efectul fluture, toate acestea se găsesc, în germene, în articolul lui Poincaré. Ceea ce ar fi putut fi un dezastru a devenit, pentru Acta Mathematica, un triumf.

Gloria revistei nu a încetat să sporească, și ea a devenit una dintre cele mai prestigioase, poate chiar cea mai prestigioasă

din lume. Azi, dacă reușești să strecorezi un articol de cercetare în cele 600 de pagini publicate anual de revista asta, ai aproape asigurat viitorul profesional în comunitatea matematică.

În 1912, la moartea sa, Poincaré a fost omagiat ca un erou național. În 1916, locuința lui Mittag-Leffler a fost transformată într-un centru internațional de cercetări, unde matematicienii veniți din toate colțurile lumii să poată să discute și să reflecteze împreună la noi probleme. A fost Institutul Mittag-Leffler, primul de acest fel, încă în activitate și azi. În 1928, la Paris a fost înființat un al doilea centru, construit pe aceleași principii de melanj internațional, acordând un loc de cinste cursurilor la nivel de cercetare: Institutul Henri Poincaré.



Henri Poincaré & Gösta Mittag-Leffler

Capitolul 36

Ann Arbor, 27 octombrie 2009

În camera de hotel din Ann Arbor. Petrec câteva zile la Universitatea din Michigan – o universitate mare, cu câțiva matematicieni de prim rang.

Clément a fost tare amărât de refuzul de la *Acta Mathematica*, ar vrea să încercăm să-i convingem să revină asupra deciziei, să le explicăm de ce e rezultatul nostru atât de novator și de important, chiar dacă tot mai rămâne o mică zonă de umbră...

Dar eu cunosc mai bine ca el revistele astea foarte prestigioase. Sunt eu însumi editor la revista concurentă, *Inventiones Mathematicae*, și știu cât de nemilos trebuie să fiu când cântăresc manuscrisele care-mi sunt trimise. Editorii de la *Acta* sunt încă mai insensibili, nimic n-o să-i clintească, cu excepția cazului în care demonstrăm că unul dintre referenți a fost de rea-credință (dar n-avem nici un indiciu că s-ar fi petrecut așa ceva), sau dacă le aducem noi elemente.

O pistă posibilă ar fi să tăiem acest articol enorm în două, pentru a-l publica mai ușor, dar detest practica asta... Așa că, deocamdată, suntem în așteptare.

Expunerile mele la Ann Arbor merg bine, dar apar iar și iar aceleași întrebări. Am discutat cu Jeff Rauch, specialist în ecuații cu derivate parțiale, care a colaborat multă vreme cu francezi. Jeff n-a fost șocat că rezultatul nu funcționează la timp infinit, dar nu i-a plăcut ipoteza de analiticitate. Sigur, alții, dimpotrivă, ar vrea timp infinit și nu-și fac probleme cu

analiticitatea, așa că mi-aș putea spune că nu-i așa grav; dar am mai multă încredere în judecata lui Jeff, și critica sa mă pune pe gânduri. Așa că seara aștern pe hârtie un raționament menit să-i arate că demonstrația noastră e cea mai apropiată de ce ar vrea el și că nu poate fi în nici un caz îmbunătățită. Ceea ce fac mi-e de altfel destinat și mie în egală.



Jeff Rauch

Timpul trece, stau în pat și scriu, scriu, dar tot nu reușesc să mă conving... Și dacă eu nu sunt convins, puține șanse să-l conving pe Jeff!

— Și dacă mă-nșel, dacă estimările mele erau prea groșiere? Totuși, aici n-am pierdut nimic... aici am pierdut ceva doar dacă și-a băgat dracul coada... aici e optim... aici ce-am simplificat nu poate decât să amelioreze lucrurile, doar să nu-mi fi făcut farmece...

Îmi petrec demonstrația ca un ciclist care-și examinează lanțul de la bicicletă, căutând vreo verigă slabă, verific precizia argumentelor de la fiecare etapă.

Și-aici?!?!?

Asta-i! Aici poate am fost prea neglijent!

Cum se poate?

— Ce-i asta, pentru numele lui Dumnezeu? N-am văzut că modurile se depărtau unele de altele și comparația mea cu suma e prea grosieră? Dacă iau sup față de sumă, e clar că o să pierd!! Bun, e adevărat că era înecat în complicații tehnice...

Mormăi și o iau de la-nceput, în minte.

— Așa... modurile sunt depărtate unele de altele, ponderea se deplasează, dacă le privesc global pierd ceva de speriat!! Păi, atunci, trebuie să le controlez separat!!

Illuminarea s-a produs în pat, cu creionul în mână. Mă ridic și străbat febril camera, cu ciorna în mână, cu ochii fixați pe formulele cabalistice. Soarta articolului se schimbă încă o dată. De data asta, nu mai e vorba despre repararea unei erori, ci de ameliorarea rezultatelor.

— Cum vom folosi asta?

Încă nu știu, dar i-am dat drumul, o să reluăm totul. Avem, în sfârșit, o pistă ca să răspundem celor două veșnice obiecții.

*

Since $\gamma = 1$ is the most interesting case, it is tempting to believe that we stumbled on some deep difficulty. But this is a trap: a much more precise estimate can be obtained by separating modes and estimating them one by one, rather than seeking for an estimate on the whole norm. Namely, if we set

$$\varphi_k(t) = e^{2\pi(\lambda t + \mu)|k|} |\widehat{\rho}(t, k)|,$$

then we have a system of the form

$$\varphi_k(t) \leq a_k(t) + \frac{ct}{(k+1)^{\gamma+1}} \varphi_{k+1} \left(\frac{kt}{k+1} \right). \quad (7.15)$$

Let us assume that $a_k(t) = O(e^{-ak} e^{-2\pi\lambda|k|t})$. First we simplify the time-dependence by letting

$$A_k(t) = a_k(t) e^{2\pi\lambda|k|t}, \quad \Phi_k(t) = \varphi_k(t) e^{2\pi\lambda|k|t}.$$

Then (7.15) becomes

$$\Phi_k(t) \leq A_k(t) + \frac{ct}{(k+1)^{\gamma+1}} \Phi_{k+1} \left(\frac{kt}{k+1} \right). \quad (7.16)$$

(The exponential for the last term is right because $(k+1)(kt/(k+1)) = kt$.) Now if we get a subexponential estimate on $\Phi_k(t)$, this will imply an exponential decay for $\varphi_k(t)$.

Once again, we look for a power series, assuming that A_k is constant in time, decaying like e^{-ak} as $k \rightarrow \infty$; so we make the ansatz $\Phi_k(t) = \sum_m a_{k,m} t^m$ with $a_{k,0} = e^{-ak}$. As an exercise, the reader can work out the doubly recurrent estimate on the coefficients $a_{k,m}$ and deduce

$$a_{k,m} \leq \text{const. } A (k e^{-ak}) k^m c^m \frac{e^{-am}}{(m!)^{\gamma+2}},$$

whence

$$\Phi_k(t) \leq \text{const. } A e^{(1-\alpha)(ckt)^\alpha}, \quad \forall \alpha < \frac{1}{\gamma+2}. \quad (7.17)$$

This is subexponential even for $\gamma = 1$: in fact, we have taken advantage of the fact that echoes at different values of k are asymptotically rather well separated in time.

As a conclusion, as an effect of the singularity of the interaction, we expect to lose a fractional exponential on the convergence rate: if the mode k of the source decays like $e^{-2\pi\lambda|k|t}$, then φ_k , the mode k of the solution, should decay like $e^{-2\pi\lambda|k|t} e^{(c|k|t)^\alpha}$. More generally, if the mode k decays like $A(kt)$, one expects that $\varphi_k(t)$ decays like $A(kt) e^{(c|k|t)^\alpha}$. Then we conclude as before by absorbing the fractional exponential in a very slow exponential, at the price of a very large constant: say

$$e^{t^\alpha} \leq \exp\left(c\varepsilon^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}\right) e^{\varepsilon t}.$$

(Extras din notele mele de curs despre amortizarea Landau.)

Capitolul 37

Aeroportul din Charlotte, 1 noiembrie 2009

În tranzit între Palm Beach și Providence, pe un aeroport anonim. Am trecut prin corvoada controlului de securitate. Să scape de fierăria de pe el nu-i ușor pentru nimeni, dar când, în plus, porți butoni la manșetă și ceas de buzunar cu lanț, când mai ai în buzunare și una sau două chei USB și o jumătate de duzină de stilouri...

Ce viață minunată era la Palm Beach, la conferința organizată de Emanuel Milman! În câțiva metri, treceai din oraș la plajă. Iar marea, ca o baie caldă. Noaptea, temperatura era ideală și nu era țiopenie, n-aveai nevoie de costum de baie... exact ca-n cadă! O cadă de dimensiunile oceanului, plus valurile și nisipul mângâietor. Și toate astea în noiembrie!

Dar, gata, mă-ntorc la frig. Mulțumită rapidității nefirești a avionului, va fi atât de repede!

Și dacă în timpul acestei escale la Palm Beach am putut să uit o zi sau două de amortizarea Landau, acum îmi ocupă din nou toate gândurile. Încep să înțeleg ce trebuie făcut ca să ameliorăm totul, prelucrez ce am înțeles în momentul de iluminare de la Ann Arbor. Dar se anunță enorm! Oare am destulă încredere ca să vorbesc despre asta la Providence, acum, când e încă doar ceva preliminar? Va fi acolo Yan Guo, cel prin care a apărut Problema, va fi o expunere foarte importantă.

Pe ciornă, încep să schițez ameliorarea, să refac calculele. Ceva îmi sare în ochi: e o chestie care scârțâie, o contradicție.

— E imposibil să pot demonstra o estimare atât de puternică...

Încă vreo câteva minute și mă conving că trebuie să fie o eroare în anumite părți complexe ale demonstrației. O fi greșit totul? Aeroportul se învâрте cu mine.

Îmi revin. Eroarea, Cédric, nu poate fi prea gravă. Ansamblul articolului funcționează prea bine, eroarea trebuie să fie locală, doar în pasajul ăsta. Și apare pentru că acest calcul e mascat de cele două shifturi de doi bani, decalajul dublu în timp pe care l-ai introdus la întoarcerea de la Museum! Dar apoi Clément a arătat cum se poate scăpa de ele!! Așa că trebuie să le elimini, e prea periculos – într-o demonstrație de asemenea complexitate, cea mai mică sursă de neclaritate trebuie eliminată.

Oricum, acest dublu decalaj, dacă nu-l găseam, puteam rămâne blocați de-a binelea. El e cel care ne-a redat speranța, ne-a permis să mergem înainte, chiar dacă apoi am înțeles că putem renunța la el. Și, până la urmă, să fie greșit?! Mă apuc să rescriu totul cu calm, fără să-l folosesc.

Deocamdată să văd cum prezint lucrurile la Providence. Trebuie să spun că am impresia că am identificat sursa ameliorării, e important, pentru că asta ar răspunde celor două critici care se aduc întotdeauna rezultatului... în același timp, nu trebuie să trișez, de data asta fără blufuri!

De la Palm Beach la Providence – ce călătorie agitată, până la urmă.

Rezervarea dumneavoastră West Palm Beach–Providence

Detaliile zborului: duminică 1 noiembrie 2009

Durata călătoriei: 6h39

Plecare: 15h00

West Palm Beach, PBI (Florida, Statele Unite)

Sosire: 16h53

Charlotte Douglas (Carolina de Nord, Statele Unite)

US Airways 1476 Boeing 737-400 Clasa Economică

Plecare: 16h49

Charlotte Douglas (Carolina de Nord, Statele Unite)

Sosire: 21h39

Providence TF Green Charlotte Douglas (Rhode Island,
Statele Unite)

US Airways 828 Airbus Industries A319 Clasa
Economică

*

Coulomb/Newton (most interesting cases)

In the proof the Coulomb/Newton interaction and the analytic regularity are **both** critical; but it still works on *exponentially large time* “because”

- the expected linear decay is exponential
- the expected nonlinear growth is exponential
- the Newton scheme converges bi-exponentially

Still it seems possible to go further by exploiting the fact that *echoes at different spatial frequencies are asymptotically rather well separated*

(Extras din expunerea mea de la Brown University, 2 noiembrie 2009.)

Capitolul 38

Saint-Rémy-lès-Chevreuse, 29 noiembrie 2009

Duminică dimineață, mâzgălesc ceva în pat, e un moment privilegiat în viața unui matematician.

Recitesc ultima versiune a articolului nostru, bifez, corectez. Senin ca acum n-am mai fost de multe luni! Am rescris totul. Am eliminat trădătoarele shifturi duble. Am reușit să exploa-tăm separarea temporală asimptotică a ecourilor, am schimbat miezul demonstrației, am studiat fiecare mod în parte (înainte, tratam totul global), am relaxat condiția de analiticitate, am inclus și cazul coulombian în timp infinit, pe care toți nu mai pridideau să ni-l ceară... totul e refăcut, simplificat, recitit, ameliorat, recitit încă o dată.

Toate acestea ar fi putut lua foarte bine trei luni, dar, în stare de exaltare, trei săptămâni au fost de-ajuns.

Recitind detaliile, ne-am întrebat nu o dată cum de am gă-sit cutare sau cutare artificiu.

Rezultatul e acum mult mai puternic. Cu aceeași ocazie, am rezolvat și o problemă care-i intriga de mult pe specialiștii ca Guo, în termeni tehnici se numește „stabilitate orbitală a echilibrelor omogene stabile liniar și nemonotone“.

Am adăugat unele pasaje, dar am și simplificat prin alte părți, așa că a ieșit doar cu foarte puțin mai lung decât înainte.

Ne-au parvenit noi simulări numerice. Săptămâna trecută, când am văzut primele rezultate, am sărit până-n tavan: calcu-lele pe care le făcuse Francis cu calculatorul după o rețetă extrem de precisă păreau să fie în perfectă contradicție cu

rezultatele noastre teoretice! Dar nu m-am descurajat, i-am comunicat lui Francis îndoielile mele, și el a reluat totul cu o altă metodă, care ar fi trebuit să fie încă mai precisă. Când au sosit noile rezultate, de data asta totul se potrivea cu predicția teoretică. Uf! Ceea ce arată încă o dată că înțelegerea calitativă nu poate fi înlocuită de calcule.

Mâine vom fi gata să punem versiunea nouă pe Internet. Iar la sfârșitul săptămânii vom putea retrimite la *Acta Mathematica*, cu șanse de succes mult mai mari.

Într-un ungher al minții, nu mă pot împiedica să mă gândesc la Poincaré însuși. Unul dintre cele mai celebre articole ale lui a fost respins de *Acta*, corectat și apoi publicat. Dacă o să mi se-ntâmpale același lucru? E deja un an Poincaré, doar am primit premiul Poincaré și conduc Institutul Poincaré...

Totuși, Poincaré... Mare atenție, Cédric, la delirul megaloman.

*

Paris, December 6, 2009

Cédric Villani

École Normale Supérieure de Lyon

& Institut Henri Poincaré

11 rue Pierre et Marie Curie

F-75005 Paris, FRANCE

cvillani@umpa.ens-lyon.fr

To Johannes Sjöstrand

Editor of Acta Mathematica

IMB, Université de Bourgogne

9, Av. A. Savarey, BP 47870

F-21078 Dijon, FRANCE

johannes.sjostrand@u-bourgogne.fr

Resubmission to *Acta Mathematica*

Dear Professor Sjöstrand,

Following your letter of October 23, we are glad to submit a new version of our paper, On Landau damping, for possible publication in Acta Mathematica.

We have taken good note of the concerns expressed by some of the experts in the screening reports on our first submission. We believe that these concerns are fully addressed by the present, notably improved, version.

First and maybe most importantly, the main result now covers Coulomb and Newton potentials; in an analytic setting, this was the only remaining gap in our analysis.

Analyticity is a classical assumption in the study of Landau damping, both in physics and mathematics; it is mandatory for exponential convergence. On the other hand, it is very rigid, and one of the referees complained that our results were tied to analyticity. With this new version this is not so, since we are now able to cover some classes of Gevray data. In the first version we wrote “we claim that unless some new stability effect is identified, there is no reason to believe in nonlinear Landau damping for, say, gravitational interaction, in any regularity class lower than analytic”. Since then we have identified precisely such an effect (echoes occurring at different frequencies are asymptotically well separated). Exploiting it led to the above-mentioned improvements.

As a corollary, our work now includes new results of stability for homogeneous equilibria of the Vlasov-Poisson equation, such as the stability of certain nonmonotone distributions in the repulsive case (a longstanding open problem), and stability below the Jeans length in the attractive case.

Another reservation expressed by an expert was our use of nonconventional functional space. While this may be the case for our “working norm”, it is not so for the naive norm

appearing in our assumptions and conclusions, already used by others. Passing from one norm to the other is done by means of Theorem 4.20.

The paper was entirely rewritten to incorporate these improvements, and carefully proofread. To prevent further inflation of the size, we have cut all developments and comments which were not strictly related to our main result; most of the remaining remarks are those intended to just explain the results and methods.

As a final comment about the length of our work, we are open to discussion regarding adjustments of organization of the paper; and we note that the modular presentation of the tools used in our work probably makes it possible for some referees to work in team, thereby hopefully alleviating their task.

We very much hope that this paper will satisfy the experts and remain

Yours truly,

Clément Mouhot & Cédric Villani

ON LANDAU DAMPING

C. MOUHOT AND C. VILLANI

ABSTRACT. Going beyond the linearized study has been a longstanding problem in the theory of Landau damping. In this paper we establish exponential Landau damping in analytic regularity. The damping phenomenon is reinterpreted in terms of transfer of regularity between kinetic and spatial variables, rather than exchanges of energy; phase mixing is the driving mechanism. The analysis involves new families of analytic norms, measuring regularity by comparison with solutions of the free transport equation; new functional inequalities; a control of nonlinear echoes; sharp scattering estimates; and a Newton approximation scheme. Our results hold for any potential no more singular than Coulomb or Newton interaction; the limit cases are included with specific technical effort. As a side result, the stability of homogeneous equilibria of the nonlinear Vlasov equation is established under sharp assumptions. We point out the strong analogy with the KAM theory, and discuss physical implications.

CONTENTS

1. Introduction to Landau damping	4
2. Main result	13
3. Linear damping	26
4. Analytic norms	36
5. Scattering estimates	64
6. Bilinear regularity and decay estimates	71
7. Control of the time-response	82
8. Approximation schemes	114
9. Local in time iteration	120
10. Global in time iteration	125
11. Coulomb/Newton interaction	158
12. Convergence in large time	164
13. Non-analytic perturbations	167
14. Expansions and counterexamples	171
15. Beyond Landau damping	178
Appendix	180
References	182

Keywords. Landau damping; plasma physics; galactic dynamics; Vlasov-Poisson equation.

AMS Subject Classification. 82C99 (85A05, 82D10)

Capitolul 39

Saint-Rémy-lès-Chevreuse, 7 ianuarie 2010

Cititul poștei electronice, imediat după trezire – ca o primă injecție de drog intelectual ușor.

Printre mesajele noi, colaboratorul meu Laurent Desvilletes îmi trimite o veste tristă: a murit prietenul nostru comun Carlo Cercignani.

Numele lui Cercignani e indisociabil de al lui Boltzmann. Carlo și-a consacrat viața profesională lui Boltzmann, teoriei sale, ecuației sale și aplicațiilor ei. A scris trei cărți de referință pe acest subiect; cea publicată în 1975 e prima lucrare de cercetare pe care am citit-o.

În ciuda obsesiei boltzmanniene, Cercignani avea preocupări extrem de diverse. Prin intermediul ecuației lui Boltzmann, a explorat o mulțime de domenii matematice legate, mai mult sau mai puțin strâns, de draga sa ecuație.

Și-apoi, acest om universal, poliglot și cultivat, nu s-a limitat la științe: operele sale includ o piesă de teatru, o culegere de poeme și traduceri din Homer.

Primul meu rezultat important, sau, cel puțin, primul de care sunt cu adevărat mândru, se referea la „Conjectura lui Cercignani“. Cu cei douăzeci și patru de ani ai mei și cu entuziasmul meu proaspăt, eram invitatul lui Giuseppe Toscani, la Pavia. Giuseppe îmi împărtășise ideea lui pentru a rezolva faimoasa conjectură, îmi sugerase să încerc în timpul acelei scurte vizite. În câteva ore, am înțeles că ideea lui naivă n-avea nici o șansă să funcționeze... dar, pe parcurs, am observat un

calcul interesant, un calcul care „sună bine“. Oarecum ca o nouă identitate remarcabilă. Și, pornind de la el, am lansat o nouă idee; racheta matematică era gata de decolare.

I-am arătat apoi lui Giuseppe cum putem reduce problema lui Cercignani despre producția de entropie în ecuația lui Boltzmann la o estimare a producției de entropie într-o problemă de fizica plasmei pe care, din întâmplare, o studiasem împreună cu Laurent. Iar apoi i-am adăugat un strop de teoria informației, subiect care m-a pasionat întotdeauna. Un concurs de împrejurări incredibil, care nu s-ar fi produs dacă Giuseppe n-ar fi avut ideea lui proastă exact în momentul vizitei mele!

Atunci, *aproape* am rezolvat conjectura și am prezentat, mai târziu, rezultatele acelea, foarte emoționat, celor mai buni experți în ecuația lui Boltzmann la un colocviu ținut la Toulouse. Ca mulți alții, și Carlo m-a descoperit tot cu acea ocazie, era încântat și mi-a spus-o. Cu voce vibrantă, m-a îndemnat foarte serios: „Cédric, prove my conjecture!“

La douăzeci și patru de ani, era unul dintre primele mele articole. Dar, cinci ani mai târziu, la al douăzeci și patrulea articol, reveneam asupra problemei cu experiență și tehnică sporite și reușeam, în fine, să demonstrez faimoasa conjectură; Carlo era tare mândru.

Carlo conta pe mine pentru a rezolva câteva dintre problemele cele mai exasperante și importante care dăinuie în studiul ecuației lui Boltzmann. Asta visam și eu, dar m-am depărtat pe nesimțite, am luat-o întâi spre transport optimal și geometrie, apoi către ecuația lui Vlasov și amortizarea Landau.

Sunt hotărât să revin mai târziu la Boltzmann, dar, chiar dacă mi-aș realiza visurile în ce privește ecuația lui, nu voi mai avea bucuria și mândria de a-i anunța lui Carlo că i-am domesticit monstrul preferat, cel pentru care ar fi dat totul.

*

Conjectura lui Cercignani se referă la legăturile dintre entropie și producția de entropie dintr-un gaz. Ca să simplificăm,

să uităm de neomogenitățile spațiale ale gazului, în așa fel încât să conteze numai distribuția vitezelor. Fie deci o distribuție de viteze $f(v)$ într-un gaz care nu e la echilibru: distribuția nu e egală cu gaussiană $\gamma(v)$ și, în consecință, entropia nu e atât de mare pe cât ar putea fi. Ecuația lui Boltzmann prezice că entropia va crește, dar va crește mult sau foarte puțin?

Conjectura lui Cercignani afirmă că sporirea instantanee a entropiei e cel puțin proporțională cu diferența dintre entropia gaussienei și entropia distribuției care ne interesează:

$$\dot{S} \geq K [S(\gamma) - S(f)].$$

Conjectura are implicații asupra vitezei la care distribuția converge către echilibru, o problemă fundamentală, pentru că e legată de fascinanta descoperire a ireversibilității de către Boltzmann.

La începutul anilor '90, Laurent Desvillettes, apoi Eric Carlen și Maria Carvalho au lucrat la conjectură și au obținut rezultate parțiale; dar, chiar dacă au deschis orizonturi complet noi, au fost departe de țel. Iar Cercignani însuși, cu ajutorul lui Russe Sasha Bobylev, a arătat că acea conjectură era prea optimistă, nu putea fi adevărată... poate numai dacă se luau în calcul ciocniri extrem de puternice, interacții mai dure decât sferele dure, cu o secțiune eficace crescând cel puțin proporțional cu viteza relativă – „sfere foarte dure“, cum se spune în jargonul teoriei cinetice a gazelor.

Dar, în 1997, Giuseppe Toscani și cu mine am demonstrat o limită „aproape“ la fel de bună:

$$\dot{S} \geq K_\varepsilon [S(\gamma) - S(f)]^{1+\varepsilon}$$

unde ε e oricât de mic, sub anumite ipoteze tehnice asupra ciocnirilor.

În 2003 am arătat că rezultatul rămâne adevărat pentru toate interacțiile rezonabile; și, mai ales, am reușit să arăt că

această conjectură e adevărată atunci când ciocnirile la viteză mare sunt de tipul sferelor foarte dure. Identitatea-cheie, descoperită cu Toscani în 1997, era următoarea:

Dacă $(S_t)_{t \geq 0}$ e semigrupul asociat ecuației lui Fokker-Planck, $\partial_t f = \nabla_v \cdot (\nabla_v f + f v)$, și $\mathcal{E}(F, G) \coloneqq (F - G) \log(F/G)$, atunci

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} [S_t, \mathcal{E}] = -\mathcal{J},$$

$$\text{unde } \mathcal{J}(F, G) = |\nabla \log F - \nabla \log G|^2 (F + G).$$

Identitatea aceasta joacă un rol-cheie în formula de reprezentare

$$\begin{aligned} \dot{S}(f) \geq K \int_0^{+\infty} e^{-4Nt} \int_{\mathbb{R}^{2N}} (1 + |v - v_*|^2) \\ \times \mathcal{J}(S_t F, S_t G) dv dv_* dt, \end{aligned}$$

unde $F(v, v_) = f(v)f(v_*)$ și $G(v, v_*)$ este media tuturor produselor $f(v')f(v'_*)$ când (v', v'_*) descrie toate cuplurile de viteze postcolizionale compatibile cu vitezele precolizionale (v', v'_*) . Pe formula aceasta se bazează soluția conjecturii lui Cercignani.*



Carlo Cercignani

Theorem (Villani, 2003). Let $S(f) = - \int f \log f$ denote the Boltzmann entropy associated with a velocity distribution $f = f(v)$. Let B be a Boltzmann collision kernel satisfying $B(v - v_*, \sigma) \geq K_B(1 + |v - v_*|^2)$ for some constant $K_B > 0$, and denote by \dot{S} the associated entropy production functional,

$$\dot{S} = \frac{1}{4} \iiint \left(f(v') f(v'_*) - f(v) f(v_*) \right) \times \log \frac{f'(v) f'(v_*)}{f(v) f(v_*)} B \, dv \, dv_* \, d\sigma.$$

Let $f = f(v)$ be a probability distribution on \mathbb{R}^N with zero mean and unit temperature. Then

$$\dot{S}(f) \geq \left(\frac{K_B |S^{N-1}|}{4(2N+1)} \right) (N - T^*(f)) [S(\gamma) - S(f)],$$

where

$$T^*(f) = \max_{e \in S^{N-1}} \int_{\mathbb{R}^N} f(v) (v \cdot e)^2 \, dv.$$

Capitolul 40

Paris, 16 februarie 2010

După-amiaza târziu, în marele meu birou de la Institutul Henri Poincaré. Am cerut să fie mărită frumoasa tablă neagră și am eliminat câteva mobile ca să obțin spațiu. M-am gândit mult la felul în care voi reamenaja biroul.

În primul rând, va dispărea instalația de aer condiționat care mă încurcă, vara e normal să-ți fie cald!

La perete, o vitrină care va adăposti câteva obiecte personale și câteva dintre piesele rare din colecția de obiecte geometrice a institutului.

La stânga, instalez bustul un pic auster al lui Henri Poincaré, cel promis de nepotul lui, François Poincaré.

Iar în spatele meu, am păstrat spațiu generos pentru un portret al lui Catherine Ribeiro! Am și ales imaginea, găsită pe Internet, Catherine depărtându-și brațele ridicate în semn de luptă, de pace, de forță și de speranță. Cu brațele depărtate ca răsculatul din *Tres de Mayo* de Goya în fața soldaților lui Napoleon, sau ca Nausicăa* lui Miyazaki în fața soldaților lui Péjité. E o imagine de forță, dar și una de abandon și vulnerabilitate. Și asta-mi place foarte mult: nu putem progresa dacă nu acceptăm să ne punem în poziție vulnerabilă. Am nevoie de imaginea aceasta a *passionariei* cântărețe, reluată de Baudoin în minunata sa *Salată nisoază***, am nevoie să vegheze asupra mea, trebuie s-o negociez direct cu Catherine.

* Personajul unui serial japonez de desene animate. (N. t.)

** Volum de benzi desenate. (N. t.)

Azi, ca întotdeauna, întâlniri, discuții, ședințe. O convorbire telefonică lungă cu președintele consiliului meu de administrație, P-DG-ul unei întreprinderi de actuariat, pasionat de implicarea sectorului privat în cercetarea științifică. Iar după-amiază, o ședință foto pentru ilustrarea unui interviu într-o revistă de popularizare a științei. Nimic din toate acestea nu e obositor, e un univers pasionant pe care-l descopăr deja de șase luni; noi contacte, noi relații, noi discuții.

Telefonul sună în timp ce fotograful își pregătește aparatele la mine în birou, instalând trepiedul și reflectorul; răspund cu gândul aiurea.

— Alo, da.

— Hello, is this Cédric Villani?

— Yes, this is me.

— This is László Lovász from Budapest.

Îmi stă inima-n loc. László e președintele Uniunii Matematiche Internaționale și, în această calitate, președintele comitetului pentru Medalia Fields. E, de altfel, unica informație pe care o am despre acest comitet: în afară de el, habar n-am care sunt ceilalți membri.

— Hello Professor Lovász, how are you doing?

— Good, I'm fine, I have news, good news for you.

— Oh, really?

E ca-ntr-un film... știu că e fraza pe care a auzit-o Wendelin Werner acum patru ani. Dar atât de devreme în cursul anului?

— Yes, I'm glad to announce that you have won a Fields Medal.

— Oh, this is unbelievable! this is one of the most beautiful days in my life. What should I say?

— I think you should just be glad and accept it.

De când Grigori Perelman a refuzat Medalia Fields, comitetul își face griji: dacă o s-o refuze și alții? Dar sunt departe de nivelul lui Perelman, și accept fără să fac nazuri.

Lovász continuă să evoce medalia. Comitetul a decis să-i anunțe devreme pe laureați, ca să fie sigur că informația vine de la comitet, și nu printr-o scurgere de informații.

— It is very important that you keep it perfectly secret, continuă Lovász. You can tell it to your family, but that is all. None of your colleagues should know.

Voi păstra deci secretul timp de... șase luni. Ce mult! Peste exact șase luni și trei zile televiziunile din lumea întreagă vor anunța vestea. De-acum înainte, trebuie să păstrez acest secret apăsător și să mă pregătesc lăuntric.

Ce încet vor trece aceste șase luni. În tot acest timp se vor face întruna speculații asupra laureaților medaliilor, dar gura mea va rămâne pecetluită. După cum va reaminti colega mea din Lyon, Michelle Schatzmann, parafrazând un înțelept chinez, „cei care știu nu spun, și cei care spun nu știu“.

Înainte de telefonul lui Lovász, îmi dădeam 40% șanse să primesc Medalia. Acum trec la 99%! Dar încă nu 100%, rămâne totuși posibilitatea unei farse. Așa cum a făcut Landau împreună cu un amic, ca să-i joace un renghi unui coleg pe care nu-l înghițea: nemernicii ăștia i-au trimis o telegramă falsă de felicitare din partea Academiei Regale a Suediei. *Felicitări, ați primit Premiul Nobel etc.*

Așa că nu te bucura încă, Cédric, cine-ți garantează că la telefon era chiar Lovász? Ai s-aștepti confirmarea prin mail înainte să-ți dai drumul!

Ah, da, secretul... Dar fotografia de la mine din birou?

Se pare că n-a auzit nimic, probabil că nici nu știe englezește. Să sperăm. Reluăm ședința foto. O fotografie în fața institutului, una cu trofeul meu de fizică-matematică...

— Cred că avem destule ca să ilustrăm articolul, totul e-n regulă. Chiar, voiam să vă întreb, în articol se spune că s-ar putea să câștigați un premiu, ceva?

— Poftim? Medalia Fields, asta vreți să spuneți? Jurnaliștii fac speculații, dar asta se decide doar mult mai târziu, congresul e tocmai în august.

- Bun, înțeleg. Credeți că aveți șanse?
 — Păi, asta-i chiar dificil de prezis... Nimeni n-are de unde ști!

*

După Primul Război Mondial, într-o Europă în descompunere, asupra căreia Tratatul de la Versailles apăsă cu o greutate strivitoare, era nevoie să se reînnoade legăturile dintre popoare. Ce e valabil pentru societate e valabil și pentru știință: trebuiau reconstruite instituțiile.

În timp ce în Franța, matematicianul și omul politic Émile Borel demarează proiectul Institutului Poincaré, în Canada, matematicianul John Charles Fields, membru influent al recent înființatei Uniuni Matematice Internaționale, are ideea să instituie o medalie pentru matematicieni: o recompensă prin care să fie salutate mari lucrări, după modelul Premiului Nobel, și totodată să fie încurajate tinerele talente. Medalia urma să fie completată de o modestă recompensă financiară.

Fields a găsit fondurile necesare proiectului, a comandat unui sculptor canadian imaginile și a ales inscripțiile în latină, limba universală, pentru a reflecta universalitatea matematicii.

Pe avers, un profil al lui Arhimede, însoțit de inscripția TRANSIRE SUUM PECTUS MUNDOQUE POTIRI – Înălță-te peste tine însuși și vei cuprinde lumea.

Pe verso, lauri, ilustrarea unei teoreme a lui Arhimede despre calculul volumelor sferelor și cilindrilor și inscripția CONGREGATI EX TOTO ORBE MATHEMATICI OB SCRIPTA INSIGNIA TRIBUERE – Matematicienii adunați din lumea întreagă au răsplătit pentru scrieri excepționale.

Iar pe muchie, numele laureatului și anul distincției.

Totul în aur masiv.

Nu și-a dorit să dea un nume acestei recompense, dar, după moartea lui, s-a impus numele de Medalie Fields. A fost

decernată pentru prima dată în 1936, apoi o dată la patru ani, începând cu 1950, cu ocazia Congresului Internațional al Matematicienilor; marea întâlnire a planetei matematice, un eveniment care astăzi adună până la 5 000 de participanți, într-un loc care se schimbă de la o ediție la alta.

Pentru a respecta voința lui Fields de a face din ea un premiu de încurajare, se acordă unor cercetători care au mai puțin de 40 de ani. Regula socotirii vârstei a fost precizată în 2006: maximum 40 de ani la 1 ianuarie al anului în care se ține congresul. Cât despre numărul medaliilor, el variază între 2 și 4, în funcție de ediție.

Un embargo ferm asupra deciziei juriului, dimpreună cu o pregătire foarte serioasă a presei, asigură decernării Medaliilor Fields un răsunet fără echivalent în lumea matematică. Medalia e adesea decernată de șeful statului în care se ține congresul, iar vestea face imediat înconjurul lumii.

Capitolul 41

RER B, 6 mai 2010

Printre mijloacele de transport în comun pariziene, RER-urile sunt, toate, remarcabile din mai multe pricini. Despre RER B, cel pe care îl iau zilnic, se poate spune că se strică în fiecare zi sau aproape, și că uneori e ticsit până la miezul nopții. (Să fim drepți, are și calități: se îngrijește ca utilizatorii lui să aibă o activitate fizică regulată, obligându-i adesea să schimbe pe parcurs trenul; și e preocupat de agilitatea lor intelectuală, menținând suspansul în privința orarelor de sosire a trenurilor și a stațiilor în care va opri.)

Dar în dimineața asta e foarte, foarte devreme, și garnitura e aproape pustie. Mă întorc acasă după un colocviu la Cairo.

Călătoria spre Cairo a fost somptuoasă, alături de cea mai frumoasă pasageră pe care-am văzut-o vreodată. Ne-am uitat împreună la un film pe calculatorul meu, împărțindu-ne căștile ca frate și soră (trebuie zburat întotdeauna la clasa economică, statistic fetele sunt mai frumoase).

Întoarcerea a fost mai puțin glamour, din toate punctele de vedere. Și, mai ales, am ajuns pe aeroportul Charles-de-Gaulle după ora 22, ceea ce mi-a adus cele mai mari necazuri (nu cumpărați niciodată bilet pentru un avion care ajunge la CDG după ora 22). Nu mai puteam lua RER-ul pentru a mă întoarce la Paris, dar asta nu m-a făcut să depun armele și să iau un taxi, așa că am așteptat autobuzul... Primul era plin încă înainte de a sosi în stația în care eram, al doilea era și el plin; cât despre al treilea, m-aș fi putut urca numai dacă – precum alți

pasageri – aş fi ales să urc în forţă şi să nu țin seamă de indicațiile șoferului. Pe scurt, am ajuns la Paris la două noaptea. Noroc că vechiul meu apartament parizian era gol şi am putut dormi câteva ore, înainte de a mă porni din nou la drum către suburbiile din sud.

În RER, îmi trec în revistă poșta electronică, fără conexiune, ca de obicei. Atâtea mailuri... Dar, de la telefonul lui Lovász din februarie şi confirmarea survenită câteva zile mai târziu, presiunea de pe umerii mei a început să scadă. Nu s-a întâmplat dintr-odată: e încă nevoie de luni de zile până să mă părasească sentimentul de *urgență*. Şi-apoi, peste trei luni şi jumătate voi avea de făcut față unei alte presiuni. Până atunci, trebuie să savurez acest sentiment de eliberare.

Un mesaj mă anunță că sunt singurul reținut pe postul 1928 de transfer la Universitatea Lyon-I. Oricum, 1928 nu putea să-mi poarte decât noroc, doar e anul înființării Institutului Poincaré! Transferul la Lyon-I îmi va permite să păstrez o legătură științifică lyoneză fără să blochez un post la Școala Normală Superioară din Lyon, unde profesorii sunt puțini.

O cerșetoare își încearcă norocul cu rarii pasageri. Intră în vorbă cu o voce spartă.

— Vii din vacanță cu rucsacul ăsta mare?

— Vacanță? Oh, nu! ultima mea vacanță a fost de Crăciun... iar următoarea nu-i pe-aproape.

— De unde vii?

— Am fost la Cairo, în Egipt, cu treabă.

— E bine. Cu ce te-ocupi?

— Eu? Cu matematica.

— Ah, bine. Hai, pa. Și baftă în continuare cu studiile!

Zâmbesc, n-are cum să nu-mi facă plăcere să fiu încă luat drept student. Dar, până la urmă, are dreptate, sunt în continuare student... poate pentru toată viața.

Azi, în timp ce zburam, m-am „amuzat“ să rezerv 5 minute ca să încerc să simt toate fenomenele electrice, electronice, electromagnetice, aerodinamice, mecanice care aveau loc în și în jurul avionului. Toate aceste mici fenomene disparate care constituie un tot care funcționează! E fascinant să devii conștient de ceea ce ne înconjoară... fascinant!

Din păcate, la comenzile unui avion, rar se întâmplă să ai mai mult de 5' pentru genul acesta de gânduri.

Toate cele bune.

(Extras dintr-un e-mail primit pe 9 septembrie 2010 de la un necunoscut.)

Capitolul 42

Biserica Saint-Louis-en-Île, 8 iunie 2010

Resping puțin prea brusc cădelnița pe care mi-o întinde cineva. În costum negru, cu cravată ascot neagră la gât în semn de doliu, păianjen verde la rever în semn de speranță, înaintez către sicriu, pe sub bolta gigantică, îl ating și mă înclin respectuos. La câțiva centimetri de mine odihnesc rămășițele lui Paul Malliavin, figură tutelară a probabilităților din a doua jumătate a secolului XX. Inventator al faimosului „calcul Malliavin“, a contribuit mai mult decât oricine la apropierea dintre probabilități, geometrie și analiză, o apropiere în care mă înscriu prin lucrările mele asupra transportului optimal. După cum îmi place grozav să-mi spun când am ocazia, „în Malliavin se află Villani“.

Malliavin era un personaj complex și fascinant, conservator și iconoclast deopotrivă, înzestrat cu o minte excepțională. M-a urmărit încă de la începutul carierei, m-a încurajat și mi-a călăuzit primii pași. Mi-a încredințat și responsabilități importante în comitetul editorial al dragului său *Journal of Functional Analysis*, revista pe care a fondat-o în 1966 împreună cu doi cercetători americani.

În ciuda diferenței de 48 de ani dintre noi, deveniserăm prieteni. Gustul său matematic era aproape de al meu și exista, fără îndoială, admirație reciprocă. N-am trecut niciodată dincolo de formula „Dragă Prietene“, dar nu era o exprimare politicoasă, formula era sinceră.

Într-o zi, eram amândoi la un colocviu în Tunisia – Malliavin avea deja 78 de ani, dar era încă atât de activ! La momentul

închiderii, făceam oficiile de prezentator și am evocat în câteva cuvinte impactul său fenomenal; nu mai știu dacă l-am numit legendă vie, dar asta era ideea. Malliavin a părut un pic descumpănit în fața acestei expuneri publice și, pe urmă, a venit și mi-a spus cu blândețe, afectând mina cea mai serioasă din lume: „Știți, Legenda e cam obosită.“

Dar orice-ar fi spus el, Paul Malliavin a murit fără să coboare garda, „făcând matematică până-n ultimul minut“, așa cum a anunțat ginerele lui. A murit în aceeași zi cu Vladimir Arnold, alt gigant matematic al secolului XX, cu un stil complet diferit.



Va trebui să mergem mai departe fără el. Puteți conta pe mine, dragă prietene, *Journal of Functional Analysis* e pe mâini bune.

Și... aș fi fost atât de mândru să vă vorbesc despre acel telefon pe care l-am primit în februarie, știu că ați fi fost încântat.

Imediat ce se termină ceremonia, trebuie să mă întorc în goană la Institutul Poincaré, unde azi se închide marele colocviu pe care îl organizăm împreună cu Institutul Clay pentru a celebra rezolvarea Conjecturii Poincaré de către Grigori

Perelman. Trebuie să fiu prezent la ultima expunere ca să rostesc câteva cuvinte drept încheiere; ca să elimin orice risc de întârziere, alerg de mama focului pe străzile din Paris, din insula Saint-Louis până în centrul arondismentului V. Dacă m-ar vedea „Domnul Paul“, cu fața roșie, șuierând ca o locomotivă și learcă de transpirație în costumul meu – sigur i-aș smulge un zâmbet. Ce prostie, oare m-am înclinat cum se cuvine în fața sicriului? Oricum, era sincer, asta contează.



Grigori Perelman

Pe la începutul secolului XX, Henri Poincaré dezvoltă un domeniu matematic complet nou, topologia diferențială, al cărei scop era de a clasifica, până la o deformare, formele care ne înconjoară.

Deformând un covrig, obținem o ceașcă, dar niciodată o sferă: ceașca are o gaură (o toartă, un mâner), sfera nu are așa ceva. La modul general, pentru a înțelege suprafețele (formele pe care un punct poate fi reperat într-o regiune mică prin două coordonate, cum ar fi longitudinea și latitudinea), e de ajuns să socotim numărul de mânere.

Dar noi trăim într-un univers cu trei dimensiuni spațiale. Oare pentru a clasifica asemenea obiecte, e de ajuns să cunoaștem

numărul de găuri? E întrebarea pe care a pus-o Poincaré în 1904, la capătul unei impunătoare serii de șase articole în care a pus, oarecum dezordonat și cu incontestabil geniu, bazele topologiei născânde. Astfel, Poincaré s-a întrebat dacă toate formele de dimensiune 3, mărginite (universuri finite, să spunem), fără găuri, sunt echivalente. Una dintre aceste forme era cunoscută, era 3-sfera, sfera cu trei coordonate din spațiul de dimensiune 4. În termeni tehnici, Conjectura lui Poincaré se enunță așa: O varietate netedă de dimensiune 3, compactă și fără bord, simplu conexă, e difeomorfă cu 3-sfera.

E adevărat enunțul acesta plauzibil? Poincaré a pus întrebarea și a încheiat cu aceste admirabile cuvinte, care aproape se ridică la nivelul faimoasei „margini înguste“ a lui Fermat*: „Dar întrebarea aceasta ne-ar duce prea departe.“

A trecut vremea...

Conjectura lui Poincaré a devenit enigma cea mai celebră din toată geometria, irigând întreg secolul XX, sursă a nu mai puțin de trei Medalii Fields pentru progrese parțiale în această problemă.

O etapă decisivă s-a înregistrat atunci când a intrat în joc William Thurston. Geometru vizionar, Thurston avea o intuiție extraordinară a ansamblului formelor de dimensiune 3 – toate universurile posibile. El a propus un fel de clasificare zoologică, taxonomică, a acestor forme de dimensiune 3; iar clasificarea asta era atât de minunată, încât s-au raliat și scepticii, cei care se mai îndoiau de Poincaré s-au înclinat în fața unei viziuni atât de frumoase, încât trebuia să fie și adevărată. E vorba despre Programul lui Thurston, care îngloba

* E vorba despre notația lui Fermat de pe marginea unei pagini din *Aritmetica* lui Diofant, în care enunța celebra lui teoremă, adăugând că n-are loc să dea și demonstrația. E foarte puțin probabil ca Fermat să fi avut într-adevăr o demonstrație corectă – ea avea să fie dată trei secole și jumătate mai târziu de Andrew Wiles, prin apelul la un uriaș aparat matematic. (N. t.)

Conjectura lui Poincaré, și din care Thurston însuși n-a reușit să exploreze decât o parte.

În 2000, Clay Mathematical Institute a ales, absolut firesc, Conjectura lui Poincaré drept una dintre cele șapte probleme pentru rezolvarea cărora acorda câte un milion de dolari. Se credea atunci că faimoasa problemă risca să reziste încă un secol!

Dar, începând din 2002, matematicianul rus Grigori Perelman uimea comunitatea anunțând o soluție a acestei probleme la care lucrase în secret timp de șapte ani!!

Născut în 1966 la Leningrad – alias Sankt-Petersburg –, Perelman contractase virusul matematic de la mama sa, om de știință de talent, din excepționala școală matematică rusă condusă de Andrei Kolmogorov, și de la clubul de matematică, unde profesori pasionați îl pregătiseră pentru olimpiadele internaționale. Studiase apoi sub îndrumarea unora dintre cei mai buni geometri ai secolului: Alexandrov, Burago, Gromov; în câțiva ani, devenise liderul cercetării în teoria spațiilor singulare cu curbură pozitivă. Demonstrația sa pentru „conjectura sufletului” i-a adus recunoașterea, părea sortit unei cariere fulminante... și-apoi a dispărut.

Din 1995, Perelman n-a mai dat semne de viață. Dar, de parte de a se fi oprit, el preluase de la Richard Hamilton teoria fluxului Ricci, o rețetă care permite să deformezi continuu obiecte geometrice etalându-le curbura, la fel cum ecuația căldurii etalează temperatura. Hamilton avea ambiția de a-și utiliza ecuația pentru a demonstra Conjectura lui Poincaré, dar, de mai mulți ani, se poticnise în probleme tehnice foarte mari.

Până la acel celebru mesaj electronic din 2002 pe care Perelman l-a trimis câtorva colegi americani. Un mesaj de câteva rânduri, semnalând un manuscris pe care-l făcuse public pe Internet și în care schița, după propria sa formulă, o „eboșă eclectică de demonstrație” a Conjecturii lui Poincaré și, de fapt, a unei mari părți a Programului lui Thurston.

Inspirat de fizica teoretică, Perelman a arătat că o anumită cantitate, pe care a numit-o entropie, pentru că seamăna cu entropia lui Boltzmann, descrește atunci când geometria e deformată de fluxul Ricci. Mulțumită acestei descoperiri originale, de o profunzime pe care cu siguranță încă nu am înțeles-o pe deplin, Perelman reușea să demonstreze că fluxul Ricci poate fi lăsat să acționeze fără să ajungă vreodată la o explozie, adică la o singularitate prea violentă. Sau, mai degrabă: dacă se produce o singularitate, aceasta poate fi descrisă și controlată.

Perelman a revenit atunci în Statele Unite pentru a face câteva expuneri asupra lucrărilor lui și a impresionat prin felul cum stăpânea problema. Agasat de presiunea mediatică pusă asupra lui, era iritat și de lentoarea cu care comunitatea matematică îi digera demonstrația. S-a întors la Sankt-Petersburg și i-a lăsat pe alții să-i verifice singuri argumentele. Au fost necesari nu mai puțin de patru ani pentru ca mai multe echipe să reproducă demonstrația lui Perelman și să completeze toate detaliile!

Miza considerabilă a acestei demonstrații și retragerea lui Perelman au pus comunitatea matematică într-o situație inedită, care a generat tensiuni și controverse în legătură cu paternitatea demonstrației. În orice caz, matematicienii au sfârșit prin a se convinge că Perelman demonstrase într-adevăr marea Conjectură a Geometrizării a lui Thurston și, odată cu ea, Conjectura lui Poincaré. Realizarea asta n-are echivalent în ultimele decenii, poate cu excepția demonstrației lui Andrew Wiles a Marii Teoreme a lui Fermat, în anii '90.

Asupra lui Perelman a plouat cu recompense: în 2006, Medalia Fields, apoi titlul de cel mai important progres științific al anului, un titlu care nu revine aproape niciodată matematicienilor. În 2010 a urmat Premiul Clay, prima oară când acest premiu substanțial era atribuit! Perelman n-avea ce face cu aceste recompense, pe care le-a refuzat pe rând.

O mulțime de jurnaliști din lumea întreagă s-au repezit să comenteze faptul că a refuzat milionul de dolari al lui Landon Clay, dezvoltând până la saturație tema matematicianului nebun. Se înșelau, nu încapă îndoială: extraordinar în cazul lui Perelman nu era nici refuzul banilor și al onorurilor, nici caracterul excentric – sunt cunoscute exemple și mai și, pentru ambele –, ci tăria de caracter și extraordinara putere de pătrundere care i-au trebuit pentru a învinge, în șapte ani de muncă solitară și curajoasă, enigma matematică emblematică a secolului XX.

În iunie 2010, Institutul Matematic Clay și Institutul Henri Poincaré au organizat împreună, la Paris, un colocviu în onoarea acestei realizări. Cincisprezece luni mai târziu, au anunțat că banii refuzați de Perelman vor servi pentru înființarea unei catedre foarte speciale la Institutul Henri Poincaré. Această „catedră Poincaré“ va găzdui tineri matematicieni extrem de promițători, în condiții ideale, fără obligații de curs sau de rezidență, pentru a le permite să se dezvolte, la fel cum Perelman a putut s-o facă atunci când a beneficiat de ospitalitatea Institutului Miller de la Berkeley.

Capitolul 43

Hyderabad, 19 august 2010

Numele meu răsună în sala imensă, iar pe ecranul gigantic mi se afișează portretul realizat de fotograful Pierre Maraval – cu lavalieră roșu-carmin și păianjen alb smălțat cu mov. N-am dormit toată noaptea, dar am impresia că n-am fost niciodată atât de treaz. E momentul cel mai important din întreaga mea viață profesională, cel la care matematicienii visează fără să îndrăznească să și-o mărturisească. Omul de știință mai mult sau mai puțin anonim, numărul 333 în lista celor „O mie de cercetători“ fotografiați de Maraval, tocmai iese la lumină.

Mă ridic și înaintez spre estradă în timp ce răsună anunțul: *O Medalie Fields e atribuită lui Cédric Villani pentru demonstrațiile date amortizării Landau neliniare și convergenței la echilibru pentru ecuația lui Boltzmann.*

Urc treptele, străduindu-mă să nu fiu nici prea încet, nici prea rapid, și mă apropiu de președinta Indiei, în centrul estradei. Președinta e scundă, dar emană o forță care e palpabilă în atitudinea anturajului său. Mă opresc în fața ei; se înclină ușor, mă înclin și eu, ca răspuns, mult prea mult. *Namaste.*

Îmi întinde medalia și eu o prezint mulțimii, cu bustul aplecat într-un mod ciudat, pentru a nu fi în profil nici față de lume, dar nici față de șefa statului indian; cam la 45 de grade față de fiecare.

Vreo trei mii de persoane mă aclamă în sala de conferințe uriașă a hotelului de lux care găzduiește Colocviul Internațional al Matematicienilor, recolta 2010. Câți erau, acum optsprezece

ani, cei care mă aplaudau după discursul de deschidere al balului bicentenarului Școlii Normale Superioare? Să fi fost o mie? *Those were the days...* Tata fusese atât de trist că nu reușise să facă nici o fotografie la ceremonia aceea, din pricina unei erori de organizare. Fusese o întreagă poveste, dar cât de derizorie pare acum, față de armata de fotografi și cinești care mitraliază scena! E ca la festivalul de la Cannes...

Iau din nou medalia, mă înclin din nou în fața președintei, fac trei pași în spate, mă întorc și mă îndrept spre perete, aproape exact așa cum am repetat îndelung aseară, împreună cu organizatorii colocviului.

Deloc rău. M-am descurcat mai bine decât Elon Lindens-
trauss, care a fost decorat primul și care, cu capul în nori, a masacrat toate indicațiile protocolare. După ce-a trecut, Stas Smirnov, un alt laureat, mi-a șoptit: „Imposibil să ne iasă mai prost.“

După momentul imortalizat de camere, nu mai știu ce s-a mai întâmplat. A venit apoi momentul prezentării recompensei în fața mulțimii digitale – aparate de fotografiat, aparate video, mașini de captat și înregistrat –, apoi a fost o conferință de presă...

În sala de ceremonii fuseseră interzise laptopurile și celularele. Imediat voi avea 300 de mesaje de felicitare în Inbox, multe altele vor urma. Mailuri de la colegi, de la prieteni, de la cunoștințe îndepărtate, de la fantome pe care nu le-am văzut de zece, douăzeci sau treizeci de ani, de la complet necunoscuți, de la foști colegi de școală primară... Unele sunt foarte emoționante. Dintr-unul din mesajele astea de felicitare aflu despre moartea cu mai mulți ani în urmă a unui prieten din tinerețe. Cum bine se știe, viața e plină de bucurii și dureri întrețesute inextricabil.

Iar, prin intermediul presei, un mesaj de felicitare oficial din partea președintelui Republicii. După cum era de așteptat, și Ngô a primit o medalie; îmi va lua ceva vreme până să

înțeleg cu adevărat ce izvor de mândrie națională e această dublă victorie. Fără să mai punem la socoteală că Yves Meyer a obținut prestigiosul Premiu Gauss pentru întreaga carieră! Francezii vor redescoperi acum că Franța este, de patru secole deja, la vârful cercetării matematice internaționale. În acest 19 august 2010, țara lor totalizează de-acum nu mai puțin de 11 medalii Fields din cele 53 atribuite până azi.

Clément e acolo, bineînțeles, radiază. Când te gândești că sunt mai puțin de zece ani de când intra prima dată în biroul meu, în căutarea unui subiect de teză... O șansă pentru el, o șansă pentru mine.

Părăsesc mulțimea și mă întorc în camera de hotel. O cameră insipidă, care nu amintește în nici un fel de India; aş putea fi la fel de bine în Țara de Foc! Dar sunt aici ca să-mi fac datoria.

Patru ore la rând, fără încetare, răspund apelurilor ziariștilor, jonglând între telefonul fix și cel mobil. Cum se termină o convorbire, îmi verific înregistrările și găsesc mesaje noi, nu se mai termină. Întrebări personale, întrebări științifice, întrebări instituționale. Și întrebări care se repetă adesea, aproape identic. *Ce simțiți după ce ați primit această recompensă?*

În fine, cobor din nou, un pic palid și înfometat – dar am trecut și prin momente mai grele. Comand un ceai masala, cu mirodenii multe, și mă duc să înfrunt din nou mulțimea. Un val de tineri se năpustește asupra mea, mulți indieni, desigur. Semnez sute de autografe și pozez, cam năuc, pentru nenumărate fotografii.

Spre deosebire de ceilalți laureați, eu am venit singur: soția și copiii au rămas în Franța, feriți de înghesuială. Prefer așa! Și am respectat consemnul, doar soției i-am spus despre medalie, nimănui altcuiva – nici măcar părinților, care aveau să afle din presă.

Iar... Catherine Ribeiro mi-a trimis acasă un superb buchet de trandafiri!

Nici nu-mi trece prin minte că, în timp ce la Hyderabad pozez pentru o mulțime de fotografii improvizati, la Lyon, colega mea Michelle Schatzman trage să moară. Fiica marelui astrofizician francez Évry Schatzman, Michelle era una dintre matematicienele cele mai originale pe care mi-a fost dat să le întâlnesc, întotdeauna gata să se lanseze în provocări pedagogice de netrecut sau să exploreze legături despre care nimeni altcineva nu îndrăzneă să se ocupe, ca frontiera dintre algebră și analiză numerică. *Frontiere*, așa se numea un program de cercetare conceput cât ai bate din palme de Michelle, cu înfățișare de manifest. Cu Michelle eram prieten încă de la sosirea mea la Lyon, în 2000; am mers la seminarii comune și am complotat, nu doar o dată, pentru a atrage cutare sau cutare matematician excelent la Universitatea din Lyon.



Michelle Schatzman

Michelle nu-și înghițea niciodată vorbele și excela la călcatul în străchini, folosind uneori un umor negru distrugător. Atinsă de un cancer incurabil de mai bine de cinci ani, alterna chimioterapia cu operațiile și ne spunea, cu ochi strălucitori, cât de frumoasă e viața de când făcea economie la șampon. Acum câteva luni, când împlinise șaizeci de ani, o sărbătorisem, la Lyon, ca matematiciană. Printre vorbitorii veniți cam de peste tot, era și polimorful Uriel Frisch, fizician de renume

mondial care, pe vremuri, fusese elevul tatălui lui Michelle; și eram eu, fiu spiritual al unuia dintre fiii săi spirituali. Michelle făcuse o analogie strălucită între expunerea mea despre amortizarea Landau și „tigrii“ evocați de Uriel. Ce clasă!

Dar, în ultimele săptămâni, starea i s-a agravat brusc. Mândră și inflexibilă, în boală ca și în timpul întregii vieți, Michelle a refuzat morfina, pentru a-și păstra luciditatea. Pe patul de moarte a aflat rezultatele Medaliei Fields pe care le aștepta nerăbdătoare; și, după câteva ore, s-a stins. Cum știm: viața e plină de bucurii și dureri întrețesute inextricabil.

*

19 august 2010, în India

Începând de azi-dimineață, marele hotel din Hyderabad conține cea mai mare concentrare de matematicieni din lume. Veniți de pe toate continentele, fiecare a adus cu sine domenii matematice specifice: analiză, algebră, geometrie, probabilități, statistică, ecuații cu derivate parțiale, geometrie algebrică și algebră geometrică, logică dură și moale, geometrie metrică și ultrametrică, analiză armonică și armonioasă, teoria probabilistă a numerelor și a numelor, descoperitori de modele și de supermodele, creatori de teorii economice și microeconomice, oameni care concep supercalculatoare și algoritmi genetici, specialiști în tratarea imaginilor și în geometrie banachică, matematică de vară, de toamnă, de iarnă și de primăvară și o mie de alte specialități care preschimbă mulțimea într-un mare zeu Shiva cu o mie de brațe matematice.

Unul după altul, cei patru laureați ai Medaliei Fields, laureații premiilor Gauss, Nevanlina și Chern sunt oferiți ca sacrificiu zeului Shiva. Președinta Indiei, mare preoteasă, îi prezintă pe cei șapte matematicieni terorizați aclamațiilor mulțimii.

E începutul mării sărbători a Congresului Internațional al Matematicienilor care, timp de două săptămâni, va vedea cum se succedă expuneri, discuții, recepții, cocktailuri, interviuri, fotografii, delegații, serate dansante și vesele, plimbări cu taxiuri de lux sau cu romantice ricșe. Sunt celebrate unitatea și diversitatea matematicii, geometria sa mereu în mișcare, bucuria muncii împlinite, felul cum ne minunăm de o descoperire, cum visăm în fața necunoscutului.

Odată sfârșită sărbătoarea, toți matematicienii se vor întoarce în universitățile și în centrele lor de cercetare, într-o întreprindere sau acasă și vor relua, fiecare în felul lui, marea aventură a explorării matematice, împingând împreună mai departe frontierele cunoașterii umane, înarmați cu logica și cu truda lor dură, dar și cu imaginație și pasiune.

Și deja sunt cu gândul la următorul Congres Internațional al Matematicienilor, peste patru ani, în sălașul venerabilului tigru coreean. Care vor fi temele principale? Care vor fi viitoarele victime?

Când va veni momentul, mii de matematicieni vor veni să se încline în fața bătrânului tigru. Vor explora geometria formelor lui sinuoase, îi vor testa vioiciunea stocastică, vor analiza partea de reacție-difuzie din dungile sale, vor efectua chirurgie diferențială pe firele din mustața lui, vor evalua curbura ghearelor sale tăioase, îl vor elibera din gropile cuantice de potențial și vor fuma împreună cu el teoriile eterate ale corzilor și mustăților vibrante. Pentru câteva zile, puternicul tigru va fi matematician din capătul cozii până-n vârful botului.

Contribuția mea la ediția coreeană a cărții *Cei care descifrează* (Belin), editată de Institutul de Înalte Studii Științifice.

*

Tyger phenomenon for the Galerkin-truncated Burgers and Euler equations (1h00') by Uriel Frisch

It is shown that the solutions of the inviscid hydrodynamical equations with suppression of all spatial Fourier modes having wavenumbers in excess of a threshold k_g exhibit unexpected features. The study is carried out for both the one-dimensional Burgers equation and the two-dimensional incompressible Euler equation. At large k_g for smooth initial conditions, the first symptom of truncation, a localized short-wavelength oscillation which we call a “tyger”, is caused by a resonant interaction between fluid particle motion and truncation waves generated by small-scale features (shocks, layers with strong vorticity gradients, etc.) These tygers appear when complex – space singularities come within one Galerkin wavelength $\lambda_g = 2\pi/k_g$ from the real domain and typically arise far away from preexisting small-scale structures at locations whose velocities match that of such structures. Tygers are weak and strongly localized at first – in the Burgers case at the time of appearance at the first shock their amplitudes and widths are proportional to $k_g^{-2/3}$ and $k_g^{-1/3}$ respectively – but grow and eventually invade the whole flow. They are thus the first manifestations of the thermalization predicted by T.D. Lee in 1952. The sudden dissipative anomaly – the presence of a finite dissipation in the limit of vanishing viscosity after a finite time –, which is well known for the Burgers equation and sometimes conjectured for the 3D Euler equation, has a counterpart in the truncated case: the ability of tygers to store a finite amount of energy in the limit $k_g \rightarrow \infty$. This leads to Reynolds stresses acting on scales larger than the Galerkin wavelength and thus prevents the flow from converging to the inviscid-limit solution. There are indications that it may be possible to purge the tygers and thereby to recover the correct inviscid-limit behaviour.

(Rezumatul unui articol de Samriddhi Sankar Ray, Uriel Frisch, Sergei Nazarenko și Takeshi Matsumoto, prezentat de Frisch la un colocviu internațional).

*

THE TYGER (William Blake, 1794)

*Tyger Tyger burning bright
In the forest of the night
What immortal hand or eye
Could frame the fearful symmetry*

*In what distant deeps or skies
Burnt the fire of thine eyes
On what wings dare he aspire
What the hand dare sieze the fire*

*And what shoulder & what art
Could twist the sinews of thy heart
And when thy heart began to beat
What dread hand & what dread feet*

*What the hammer what the chain
In what furnace was thy brain
What the anvil what dread grasp
Dare its deadly terrors clasp*

*When the stars threw down their spears
And water'd heaven with their tears
Did he smile his work to see
Did he who made the Lamb make thee*

*Tyger Tyger burning bright
In the forest of the night
What immortal hand or eye
Dare frame the fearful symmetry*

Capitolul 44

Saint-Rémy-lès-Chevreuses, 17 noiembrie 2010

Toamna, numai auriu, roșu și negru: frunze auriu, frunze roșii, corbi negri strălucind ca în cântecul de noiembrie al lui Tom Waits.

Ies din stația dragului meu bătrân RER B și mă afund în noapte.

Ultimele trei luni au fost atât de intense!

Autografele.

Ziarele.

Radiourile.

Emisiunile TV.

Filmările.

Duetul meu cu Franck Dubosc, pe care l-am descoperit în direct pe un platou al Canal+... unii mi-au reproșat că m-am pretat la „farsa” asta, dar ce contează! A doua zi, pe stradă, mă oprea toată lumea, toți mă „văzuseră la televizor”.

Și întâlnirile cu politicieni, cu artiști, cu studenți, cu industriași, cu patroni, cu revoluționari, cu parlamentari, cu enarci¹, cu președintele Republicii...

Întrebări care ciclează. *Cum ați ajuns să vă placă matematica de ce sunt francezii atât de buni la matematică v-a schimbat Medalia Fields viața ce motivație mai aveți acum că ați primit distincția supremă sunteți cumva un geniu care e semnificația păianjenului dumneavoastră...*

1. Fost elev al Școlii Naționale de Administrație (ENA) (N. t.)

Bao Châo a plecat înapoi în Statele Unite, lăsându-mă să înfrunt de unul singur valul. Ceea ce nu-mi displace, e pasionant să descoperi universul ăsta. Partea din spatele decorului de televiziune, din spatele ziarelor. Constat pe propria mea piele că un interviu se depărtează adesea de ceea ce spune persoana interviuată, că stă să se nască o persoană mediatică abstractă, pe nume Cédricvillani, una care nu e cu adevărat eu și pe care nu pot s-o controlez cu adevărat.

Toate astea în timp ce sunt, în continuare, director... în ziua în care i-am dat replica lui Dubosc, am dat și un interviu la RTL, am participat la o ședință la Primărie pe tema locuințelor universitare, am discutat mult cu președintele consiliului de administrație de la institutul meu și am înregistrat pentru emisiunea literară nocturnă *Cuvinte la miezul nopții*.

Și-apoi, am coordonat un proiect pentru recuperarea unei subvenții naționale, via „Investiții pentru viitor“ (Marele Împrumut, cum se spune). Un proiect delicat care grupează cele patru institute naționale și internaționale din Franța: Institutul Henri Poincaré, la Paris (IHP), Institutul de Înalte Studii Științifice, la Bures-sur-Yvette (IHÉS), Centrul Național de Reuniuni Matematice, la Luminy (CIRM), Centrul Internațional de Matematică Pură și Aplicată, la Nisa (CIMPA). IHÉS e versiunea franceză a IAS de la Princeton, unde am petrecut șase luni: un refugiu minunat unde toamna răsună trosnetul cojilor de castane care se sparg pe jos, unde genialul Grothendieck a produs partea cea mai bună din incomparabila sa operă și unde tinerii cercetători își pot duce mai departe proiectele, în contact cu unii dintre cei mai buni matematicieni din lume. CIRM, cu conferințele lui săptămânale, ar fi, mai degrabă, declinarea franceză a institutului Oberwolfach, doar că austeră Pădure Neagră a fost înlocuită cu somptuoasele calancuri marseieze. Cât despre CIMPA, organism internațional dincolo de orice dubiu, se ocupă cu susținerea matematicii în țările în curs de dezvoltare, oriunde e necesar și bine-venit.

Pentru a grupa aceste patru institute și organismele de care țin, atât de diverse, în jurul unui aceluiași contract, am cheltuit comori de negociere. După un an întreg la cârma IHP și după câteva furtuni diplomatice, eram pregătit pentru această muncă delicată de coordonare. Gruparea se va numi CARMIN: Centrul de Sprijin și de Reuniuni Matematice INTERNAȚIONALE¹.

Pe lângă activitățile acestea, am conceput două noi expuneri pentru marele public, am scris un text lung cu tema „Timpul“, pentru un seminar de fizică teoretică... și am fost nevoit să iau pe seama mea câteva activități administrative suplimentare, ca să atenuez efectul absenței mai multor persoane din IHP lovite de o adevărată serie neagră de diverse boli. Noroc că personalul rămas sănătos e atât de devotat!

În aceste trei luni, mi-am cheltuit toate rezervele, am ajuns chiar să-mi planific orele de somn cu câteva zile înainte! *Hasta que el cuerpo aguante!* Și-n timp ce mă gândesc la toamna asta epuizantă, continui să merg și ajung acum în partea **neagră** a parcursului meu.

În stânga mea, pădurea, doldora de vulpi și de căprioare; în dreapta, o pajiște pe care dorm cumiști vacile. Dar mai ales, următorii trei sute de metri, o cărare complet în beznă, fără urmă de iluminat public, fără urmă de poluare luminoasă.

E neprețuit un drum fără lumină! Când luna se ascunde, nu vezi nici la trei metri. Pasul se iuțește, inima bate un pic mai repede, simțurile sunt în alertă. Un trosnet în pădure te face să ciulești urechile, drumul ți se pare mai lung decât de obicei, îți închipui un vagabond la pândă, abia te abții să n-o iei la sănătoasa.

Tunelul ăsta negru seamănă puțin cu faza de întuneric complet de la începutul unui proiect de cercetare în matematică. *Un matematician e ca un orb într-o cameră în beznă, încercând*

1. Centre d'Accueil et de Rencontre Mathématiques INTERNATIONALES.
(N. t.)

să vadă o pisică neagră care, poate, nici nu se află acolo... Se pare că a spus-o Darwin, și avea dreptate! Beznă s-o tai cu cuțitul, Bilbo în tunelul lui Gollum.

Perioada aceasta în beznă, care marchează primii pași ai unui matematician într-un teritoriu necunoscut, e prima fază a unui ciclu obișnuit.

După întineric urmează o mică, foarte mică licărire plăpândă, care ne dă de înțeles că se pregătește ceva... Apoi, după licărirea aceea plăpândă, dacă totul merge bine, firul se descâlcește și ieșim la lumină, în plină zi! Ești mândru și sigur de tine, faci peste tot expuneri. Adesea, faza asta vine dintr-odată, dar uneori e cu totul altfel, am oarecare experiență.

Și-apoi, după lumină, vine întotdeauna o fază de depresie care urmează marilor împliniri, fază în care-ți minimalizezi contribuția. *La urma urmei, ce-ai făcut tu ar fi putut face orice cretin, ai putea să-ți găsești deja o problemă mai serioasă și să faci ceva cu viața ta.* Ciclul cercetării matematice...

Dar, deocamdată, e bine în beznă, la modul propriu, prin care înaintez. Mergând, trag cortina peste o zi bogată în emoții. Ngô, Meyer și cu mine ne-am întâlnit cu președintele Adunării Naționale, în care am recunoscut un frate de arme de îndată ce i-am aflat trecutul de cercetător; apoi am fost aclamați de întreaga Adunare, înainte de pitoreasca sesiune de întrebări la guvern. Iar în biblioteca Adunării Naționale am admirat o comoară inestimabilă, o mobilă construită la comandă pentru a adăposti scrierile oamenilor de știință participanți la expediția în Egipt. Monge, Fourier și atâția alții au consemnat în aceste volume rezultate care au revoluționat biologia, istoria, arhitectura, totul. Frumusețea imaginilor, trasate de mână, cu materiale realizate la fața locului ca să înlocuiască ce se pierduse într-un naufragiu, măreția cărților vechi pe care doar experții sunt autorizați să le mănuiască, toate astea m-au bulversat și m-a copleșit un sentiment luminos.

Și totuși, într-un ungher al minții mele, stăruie o neliniște discretă, dar tenace, care a tot crescut, puțin câte puțin în cursul ultimelor luni... Încă n-avem vești de la *Acta*, încă n-avem vești de la referenți! Doar această expertiză independentă, realizată de specialiști al căror anonim va fi păstrat cu grijă, va putea să ne confirme rezultatele.

După atâtea onoruri, ce-am să spun dacă articolul e greșit? Îmi imaginez că totuși comitetul Fields a cerut să ne fie verificată amortizarea Landau, dată fiind miza, dar, ca de obicei, nu sunt la curent cu nimic. Și dacă vreun referent dă peste o greșeală în timpul lentului proces de recitare și verificare de către terți? Cédric, ești tată de familie, sinuciderea rituală nu-i o opțiune.

Gata cu glumele, lucrurile se vor rezolva până la urmă. De altfel, ajung la capătul tunelului întunecat. Acolo, chiar la capăt, o mică, mică licărire plăpândă, e lumina digicodului. Salvat!

E neprețuită emoția asta cotidiană, întunericul acesta încărcat de sentimente intense, dar ce bine te simți când l-ai depășit! Deschid poarta grea, traversez curtea, intru la mine, aprind lumina, urc la etaj și mă instalez la birou, pornesc laptopul și descarc mesajele electronice. Cum, doar 88 de mesaje noi în ultimele 12 ore? Săracă zi...

Dar, în mijlocul șuvoiului, unul care-mi atrage imediat atenția: *Acta Mathematica*! Deschid febril mesajul de la Johannes Sjöstrand, editorul care se ocupă de articolul nostru.

The news about your paper are good.

Ar fi trebuit să scrie *is good*: „news“, ca și „mathematics“, e singular, în pofida *s*-ului final. Dar ce contează. N-am nevoie de mai mult, forwardez imediat lui Clément, adăugând două cuvinte: *Goooooood news*.

De data asta, teorema noastră chiar s-a născut.

Teoremă (Mouhot, Villani, 2009):

Fie $d \geq 1$ un număr întreg și fie $W : \mathbb{T}^d \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție periodică, pară, local integrabilă, a cărei transformată Fourier satisface condiția $|\widehat{W}(k)| = O(1/|k|^2)$.

Fie $f^0 = f^0(v)$ o distribuție analitică $\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_+$, cu proprietatea că

$$\sum_{n \geq 0} \frac{\lambda_0^n}{n!} \|\nabla_v^n f^0\|_{L^1(dv)} < +\infty,$$

$$\sup_{\eta \in \mathbb{R}^d} \left(|\tilde{f}^0(\eta)| e^{2\pi\lambda_0|\eta|} \right) < +\infty$$

pentru un anumit $\lambda_0 > 0$, unde \tilde{f} desemnează transformata Fourier a lui f .

Presupunem că W și f^0 satisfac condiția de stabilitate liniară generalizată a lui Penrose: pentru orice $k \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$, dacă punem $\sigma = k/|k|$ și, pentru orice $u \in \mathbb{R}$, $f_\sigma(u) = \int_{u\sigma + \sigma^\perp} f^0(z) dz$, atunci, pentru orice $w \in \mathbb{R}$ cu $f'_\sigma(w) = 0$, avem

$$\widehat{W}(k) \int_{\mathbb{R}} \frac{f'_\sigma(u)}{u - w} du < 1.$$

Fie dat un profil inițial al pozițiilor și al vitezelor, $f_i(x, v) \geq 0$, foarte aproape de starea analitică f^0 , în sensul că transformata sa Fourier \tilde{f} în poziție și viteză satisface condiția

$$\sup_{k \in \mathbb{Z}^d, \eta \in \mathbb{R}^d} |\tilde{f}(k, \eta) - \tilde{f}^0(\eta)| e^{2\pi\mu|k|} e^{2\pi\lambda|\eta|}$$

$$+ \iint |f_i(x, v) - f^0(v)| e^{2\pi\lambda|v|} dx dv \leq \varepsilon,$$

cu $\lambda, \mu > 0$ și $\varepsilon > 0$ suficient de mic.

Atunci există profiluri analitice $f_{+\infty}(v), f_{-\infty}(v)$ astfel încât soluția ecuației lui Vlasov neliniară, cu potențial de interacție W și date inițiale f_i la timpul $t = 0$, verifică

$$f(t, \cdot) \xrightarrow{t \rightarrow \pm\infty} f_{\pm\infty} \text{ slab};$$

mai precis în sensul convergenței simple, exponențial rapide, a modurilor Fourier.

Viteza de convergență a ecuației neliniare este arbitrar apropiată de viteza de convergență a ecuației liniarizate, cu condiția ca $\varepsilon > 0$ să fie suficient de mic. În plus, marginalele $\int f dv$ și $\int f dx$ converg exponențial repede către valoarea lor de echilibru, în toate spațiile C^r .

Toate estimările care apar în enunțul nelinier sunt constructive.



Clément Mouhot & Cédric Villani

Epilog

Budapesta, 24 februarie 2011

Cele patru sticle sunt aliniate una lângă alta pe măsuța care se clatină. Cu mintea aburită de vinul select, podgoria Villányi, încerc să-l urmăresc pe Gábor în descrierea, cu multe detalii, a meritelor comparate ale acestor patru sortimente de tokay. Tânăr, sec, dulce... nu-s în stare să aleg.

După ce-au mai luat de două ori din gulaș și din tarta de mere, copiii s-au dus să fotografieze totul în micul apartament în care tronează un ecran gigant. Claire mă ajută să aleg un tokay bio și licoros, stăpâna casei aduce un cappuccino superb cu lapte delicios de cremos...

Gábor vorbește despre Ungaria, despre tinerețea lui, despre cele douăsprezece ore de matematică săptămânale ale micuților maghiari pasionați, despre enunțurile problemelor de olimpiadă retransmise la televizor – și le amintește și soția lui.

Vorbește despre limba sa extraordinară, verișoară îndepărtată a finlandezei de care s-a despărțit acum o mie de ani. O limbă care obligă ascultătorul să stea la pândă, întrebându-se întruna dacă ultimul cuvânt nu va da cumva peste cap sensul care era cât pe ce să se precizeze. Ea să fie cea care a făcut din Ungaria cel mai mare producător de savanți și oameni de știință legendari din prima jumătate a secolului XX? Patria lui Erdős, von Neumann, Fejér, Riesz, Teller, Wigner, Szilard, Lax, Pólya și toți ceilalți...

— Evreii au jucat un rol vital! insistă Gábor, țara noastră a fost, la un moment dat, cea mai puțin antisemită din partea

asta a globului, intelectualii evrei au dat fuga aici și au contribuit decisiv la zestrea intelectuală a țării. Apoi s-a schimbat vântul, n-au mai fost bine-veniți, așa c-au plecat, din păcate...

Gábor e descoperitorul Gömböc-ului, forma aceasta incredibilă în existența căreia credea Vladimir Arnold; formă plină și omogenă care are doar un singur echilibru stabil și doar unul instabil. O formă superstabilă minimală care revine întotdeauna la poziția de repaus, indiferent cum o așezi pe jos. Ca un Hopa-Mitică – dar acesta are greutate adăugată în partea de jos, în timp ce Gömböc-ul e omogen.

Imediat ce-am ajuns la Budapesta, am auzit vorbindu-se despre descoperirea asta și mi-am imaginat Gömböc-ul expus în biblioteca institutului meu. Dar, înainte de orice, am vrut să-l văd, să mă conving că există cu adevărat! A fost de-ajuns un schimb de mailuri. Institutul meu va fi foarte onorat să expună minunata dumneavoastră descoperire. Voi fi foarte onorat dacă descoperirea mea va îmbogăți colecția prestigiosului dumneavoastră institut; voi veni mâine la expunerea dumneavoastră, vă invit poimăine la noi, pentru prânz. Așa să fie, abia aștept să vă întâlnesc.

— Ce expunere frumoasă ai făcut ieri, la universitate, îmi tot spune Gábor în culmea surescitării. What a talk! *What a beautiful talk!* Ce frumos era, parc-ar fi fost și Boltzmann în sală. Printre noi! Ce expunere frumoasă!

O ia martor pe Claire:

— Sala era supraîncălzită, prea mică pentru tot publicul, proiectorul nu mai venea, soțul tău trebuia să sară peste firele care zăceau pe jos, tabla cobora singură, dar lui nici nu-i păsa! O oră și jumătate de conferință! Ce bucurie!

Ciocnim pentru Boltzmann, pentru fraternitatea matematicienilor din toate țările, pentru articolul meu despre amortizarea Landau, care, după câteva schimburi de mesaje cu referenții, a fost, ieri, definitiv acceptat de *Acta Mathematica*.

Tokayul licoros alunecă pe gâtleej, Gábor vorbește-nainte. Vorbește despre călătoria lui la Congresul Internațional de

Matematici Aplicate de la Hamburg, din 1995. Se organizase un prânz plătit, cu participarea lui Arnold, așa că n-a ezitat, s-a înscris; investise în asta jumătate din bugetul lui sărăcăcios. Iar apoi, intimidat, nici măcar nu îndrăznise să intre în vorbă cu marele om!

Dar, în ziua următoare, Gábor a nimerit întâmplător peste eroul său, care se lupta cu un tip enervant (v-am rezolvat deja problema, acum zece ani, nu, n-am timp să ascult demonstrația), și Arnold prinsese ocazia ca să scape din capcană (nu, credeți-mă, îmi pare foarte rău, am întâlnire cu domnul aici de față).

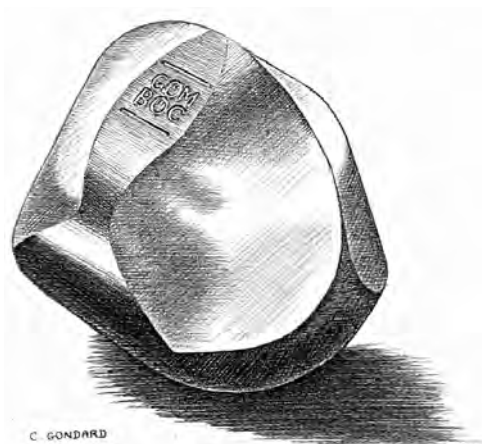
Arnold voise să afle mai multe despre acest ciudat conviv taciturn. „Te-am văzut ieri la prânz, știu că vii din Ungaria și prețul mesei a fost mare pentru tine, așa că, dacă vrei să-mi spui ceva, acum e momentul!”

Gábor i-a vorbit despre cercetările lui, iar Arnold i-a spus că nu sunt în direcția cea bună. În timpul discuției care s-a legat, Arnold i-a mărturisit credința lui în existența unei Forme Stabile Minimale, forma aceea care n-ar avea decât două echilibre, unul dintre ele stabil.

Aceste câteva minute i-au schimbat lui Gábor destinul: doisprezece ani la rând a urmărit forma aceea faimoasă. Gábor a adunat mii de pietricele până să se convingă că forma aceea nu există în natură și că trebuie creată de la zero, poate o sferă deformată, un sferoid – pentru că sferoizii sunt rari în natură.

În fine, în 2007 a găsit-o, cu ajutorul lui Peter, unul dintre studenții lui, devenit părtaș la aventură. O sferă deformată în mod subtil, artă de nivel înalt. A botezat-o Gömböc, sferoid în maghiară.

Primul Gömböc era abstract, atât de apropiat de o sferă că diferența nici nu se vedea cu ochiul liber. Dar treptat, părinții lui au reușit să-l mai deformeze, să ajungă la un fel de încrucișare între o minge de tenis și o piatră tăiată de un om preistoric, dar având, în continuare, aceeași proprietate, numai o poziție de echilibru stabil și o poziție de echilibru instabil!



Gábor îmi întinde un Gömböc enorm, din plexiglas:

— Nu-i așa că-i frumos? Doisprezece ani de căutări! Când îl văd, chinezii cred că e o reprezentare în relief a lui Yin și Yang! Primul i-a fost oferit lui Arnold. O să le spun să-ți trimită un exemplar frumos, din metal, numerotat 1928, ca data de naștere a institutului tău!

Încă o înghițitură de tokay. Copiii fotografiază fotografiile care defilează pe ecranul uriaș; soția lui Gábor, fotograf amator de talent, fotografiază copiii. Gábor continuă să vorbească și-i ascult fascinat povestea. O poveste fără sfârșit, o poveste despre matematică, despre căutări, despre pasiune și vise.

Anexă Traduceri

p. 32: Extras din nuvela „Pasărea Soare“, de Neil Gaiman.

— Spune drept, Crawcrustle, zise Jackie Newhouse înfierbântată, de cât timp mănânci Phoenixul?

— Puțin peste zece mii de ani, spuse Zebediah. Plus-minus câteva mii. Nu-i greu, dac-ai prins șmecheria; să prinzi șmecheria, asta-i partea grea. Dar Phoenixul ăsta e cel mai bun pe care l-am gătit vreodată. Sau poate-ar trebui să spun: „Nici odată n-am gătit atât de bine Phoenixul ăsta“?

— Anii! zise Virginia Boote, vi-i arde focul!

— Chiar așa, admise Zebediah. Oricum, trebuie să te obișnuiești cu căldura înainte să mănânci pasărea. Altfel, riști să arzi de tot.

— Oare de ce nu mi-am amintit chestia asta? se întrebă Augustus DouăPene McCoy, printre flăcările vii care-l înconjurau. De ce nu mi-am amintit că așa s-a prăpădit tata și, înaintea lui, taică-su, că amândoi s-au dus la Heliopolis ca să mănânce Phoenixul? De ce mi-aduc aminte abia acum?

— O să ardem până n-o să mai rămână nimic din noi? întrebă Virginia, incandescentă. Sau o să ardem numai până-n copilărie, apoi până la stadiul de fantome și de îngeri, și-apoi o să schimbăm din nou sensul de mers? N-are-a face. Oh, Crusty, e-așa de nostim!

(Extras din „L'Oiseau-Soleil“, de Neil Gaiman, în *Des choses fragiles*, éd. Diable-Vauvert, 2009; trad. Michel Pagel.)

p. 74: DNE, grupul rock de la IAS

Ce iese când aduni 200 din cei mai serioși savanți ai lumii și-i izolezi într-o clădire din lemn, îi eliberezi de orice fel de preocupări lumești ale vieții universitare și le spui să facă exact ce știu ei mai bine? Nu mare lucru. E drept, se face multă cercetare de vârf la faimosul Institute for Advanced Studies (Institutul de Studii Avansate) de la Princeton. Mulțumită remarcabilei ospitalități a institutului, nu există loc mai bun în care un universitar să stea și să reflecteze. Și totuși, după spusele multor invitați, problema e că singurul lucru care se poate face la institut e să stai și să reflectezi. Ar fi un eufemism să numești IAS un turn de fildeș, pentru că nu există nici un loc mai înălțat. Cele mai multe instituții universitare de clasă mondială, chiar și cele mai serioase, dispun de un loc unde un șoarece de bibliotecă pradă lenii poate bea o halbă de bere și poate asculta un tonomat. Nu și IAS. Bătrânii evocă zilele lipsite de griji din anii '40 și '50, când institutul era punctul de întâlnire al elitei intelectuale de la Princeton. John von Neumann a inventat informatica modernă, dar se spune și că a născocit o mulțime de cocktailuri îmbătătoare, pe care le-a distribuit cu generozitate în timpul unor petreceri fioroase. Einstein a dat peste cap fizica, dar, la ocazii, știa să treacă și la scripcă. După modelul anticilor, patriarhii institutului păreau să creadă că oamenii trebuie să fie întregi, cum ar fi spus ei, implicați în activități de toate felurile, dintre cele simple, ca și dintre cele elevate, potrivit proporției de aur. Dar acum, apolinicul a copleșit în asemenea măsură dionisiacul la institut, încât, după părerea multor membri, până și ideea de a te distra e considerată numai în termeni abstracti. Plimbându-te prin institut, poți întâlni laureați Nobel sau medaliați Fields. Dat fiind sprijinul generos al institutului, și tu ai putea deveni unul dintre ei. Dar poți fi aproape sigur că nu vei bea un pahar, și nici nu vei sta de bancuri cu vreunul dintre ei.

p. 187: Invitația la un colocviu la Fields Institute

Date: Tue, 22 Sep 2009 16:10:51 -0400 (EDT)
From: Robert McCann <mccann@math.toronto.edu>
To: Cedric Villani <Cedric.VILLANI@umpa.ens-lyon.fr>
Subject: Fields 2010

Draga Cedric,

Toamna viitoare particip la organizarea unui workshop de „Probabilitati geometice si transport optimal”, intre 1-5 noiembrie, parte a Semestrului tematic Fields de „Analiza geometrica asimptotica”.

Vei fi cu siguranta invitat la workshop, cu toate cheltuielile acoperite, si sper ca vei avea posibilitatea sa vii.

Totusi, voiam sa verific si daca nu cumva ai fi interesat sa vizitezi Toronto si Fields Institute pentru o perioada mai lunga, caz in care vom incerca sa facem proiectul asta atragator.

Astept vesti,

Robert

p. 195: Extras din note de curs

Cum $\gamma = 1$ este cazul cel mai interesant, e tentant să credem că ne lovim de o dificultate profundă. Dar e doar o capcană: o estimare mult mai precisă se poate obține *separând modurile* și estimându-le pe rând, mai degrabă decât căutând o estimare pe norma întreagă. Anume, dacă punem

$$\varphi_k(t) = e^{2\pi(\lambda t + \mu)|k|} |\hat{\rho}(t, k)|,$$

atunci avem un sistem de forma

$$\varphi_k(t) \leq a_k(t) + \frac{ct}{(k+1)^{\gamma+1}} \varphi_{k+1} \left(\frac{kt}{k+1} \right) \quad (7.15)$$

Să presupunem că $a_k(t) = O(e^{-ak} e^{-2\pi\lambda|k|t})$. Mai întâi, simplificăm dependența de timp punând

$$A_k(t) = a_k(t) e^{2\pi\lambda|k|t}, \quad \Phi_k(t) = \varphi_k(t) e^{2\pi\lambda|k|t}.$$

Astfel, (7.15) devine

$$\Phi_k(t) \leq A_k(t) + \frac{ct}{(k+1)^{\gamma+1}} \Phi_{k+1} \left(\frac{kt}{k+1} \right). \quad (7.16)$$

(Exponențiala din ultimul termen e corectă pentru că $(k+1)(kt/(k+1)) = kt$.) Acum, dacă obținem o estimare subexponențială pentru $\Phi_k(t)$, aceasta va implica o descreștere exponențială pentru $\varphi_k(t)$.

Iarăși, căutăm o serie de puteri, presupunând că A_k e constant în timp, descrescând la fel ca e^{-ak} atunci când $k \rightarrow \infty$; astfel, facem ansatz-ul $\Phi_k(t) = \sum_m a_{k,m} t^m$ cu $a_{k,0} = e^{-ak}$. Ca exercițiu, cititorul poate face calculele pentru estimarea dublu recurentă pentru coeficientul $a_{k,m}$ și poate deduce

$$a_{k,m} \leq \text{const. } A (k e^{-ak}) k^m c^m \frac{e^{-am}}{(m!)^{\gamma+2}}$$

de unde

$$\Phi_k(t) \leq \text{const. } A e^{(1-\alpha)(ckt)^\alpha} \quad \forall \alpha < \frac{1}{\gamma+2} \quad (7.17)$$

Aceasta e subexponențială chiar și pentru $\gamma = 1$: de fapt, am folosit faptul că, *asimptotic, ecourile la valori diferite ale lui k sunt separate destul de bine în timp*.

Ca o concluzie, ca efect al singularității interacției, *ne așteptăm să pierdem o exponențială fracționară pe rata de convergență*: dacă modul k al sursei descrește ca $e^{-2\pi\lambda|k|t}$ atunci φ_k , modul k al soluției ar trebui să descrească la fel ca $e^{-2\pi\lambda|k|t} e^{(c|k|t)^\alpha}$. Mai general, dacă modul k descrește ca $A(kt)$,

ne așteptăm ca $\varphi_k(t)$ să descrească la fel ca $A(kt) e^{(c|k|t)^\alpha}$. În acest caz, putem trage aceeași concluzie ca mai sus, absorbind exponențiala fracționară într-o exponențială foarte lentă, cu prețul unei constante *foarte mari*, de pildă

$$e^{t^\alpha} \leq \exp\left(c\varepsilon^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}\right) e^{\varepsilon t}.$$

p. 199: Extras din expunerea mea de la Brown University

Coulomb/Newton (cazul cel mai interesant)

În demonstrație, interacția Coulomb/Newton și regularitatea analitică sunt, **ambele**, critice; dar asta continuă să funcționeze și la *timpi exponențial de mari* „pentru că“

- descreșterea liniară așteptată e exponențială
- creșterea neliniară așteptată e exponențială
- schema Newton converge biexponențial

Cu toate acestea, pare posibil să reușim mai bine exploatând faptul că *ecourile la frecvențe spațiale diferite sunt destul de bine separate asimptotic*.

p. 201: Scrisoarea de resubmitere

Paris, 6 decembrie 2009

*Cédric Villani
École Normale Supérieure de Lyon
& Institut Henri Poincaré
11 rue Pierre et Marie Curie
F-75005 Paris, FRANCE
cvillani@umpa.ens-lyon.fr*

*To Johannes Sjöstrand
Editor of Acta Mathematica
IMB, Université de Bourgogne
9, Av. A. Savarey, BP 47870
F-21078 Dijon, FRANCE*

Resubmitere la Acta Mathematica

Dragă Domnule Profesor Sjöstrand,

În urma scrisorii dumneavoastră din 23 octombrie, suntem bucuroși să submitem o nouă versiune a manuscrisului nostru, Amortizarea Landau, pentru eventuala publicare în Acta Mathematica.

Am analizat rezervele exprimate de unii dintre experți în rapoartele preliminare asupra primei noastre submiteri. Creдем că am ținut seama de toate aceste rezerve în versiunea actuală, îmbunătățită în mod esențial.

În primul rând, și poate asta e cel mai important, rezultatul principal acoperă acum potențialele lui Coulomb și Newton; în cadru analitic, aceasta era singura zonă de umbră care mai exista în analiza noastră.

Analiticitatea e o ipoteză clasică în studiul amortizării Landau, în matematică și fizică deopotrivă; e indispensabilă convergenței exponențiale. Este totuși foarte rigidă, și unul dintre experți s-a plâns că rezultatele noastre nu se puteau dispensa de analiticitate. Nu mai e cazul în noua versiune, deoarece suntem acum în măsură să includem unele clase de date Gevrey.

Scriam în prima versiune: „afirmăm că, afară de cazul în care se identifică un nou factor de stabilitate, nu există nici un motiv pentru a crede în amortizarea Landau neliniară pentru, să spunem, interacția gravitațională, într-o clasă de regularitate inferioară celei analitice“. De atunci, am identificat tocmai un asemenea factor (ecourile care se produc la frecvențe diferite sunt bine separate asimptotic). Exploatarea sa a condus la îmbunătățirile mai sus menționate.

Ca un corolar, lucrarea noastră include acum noi rezultate de stabilitate pentru echilibre omogene ale ecuației Vlasov-Poisson, ca stabilitatea anumitor funcții de distribuție nemonotone în cazul repulsiv (problemă deschisă de multă vreme) și stabilitatea sub lungimea Jeans în cazul atractiv.

O altă rezervă exprimată de un expert se referea la faptul că folosim spații funcționale neconvenționale. Poate fi cazul pentru „norma de lucru“, dar nu pentru norma naivă prezentă în ipoteze și în concluzii, folosită deja de alți cercetători. Trecerea de la o normă la alta se face prin intermediul Teoremei 4.20.

Articolul a fost rescris în întregime pentru a încorpora aceste îmbunătățiri și a fost verificat cu atenție. Ca să evităm o nouă creștere în lungime, am suprimat toate dezvoltările și comentariile care nu erau strict legate de rezultatul nostru principal; majoritatea remarcilor care au rămas sunt destinate numai explicării rezultatelor și metodelor.

Un comentariu final despre lungimea lucrării noastre: suntem pregătiți să discutăm eventuale ajustări în organizarea

articolului și facem observația că prezentarea modulară a metodelor folosite în manuscris deschide poarta unei munci în echipă a experților însărcinați cu verificarea, ceea ce ar trebui să le ușureze sarcina.

Sperăm cu toată tăria că articolul îi va satisface pe experți și rămânem

Ai dumneavoastră,

Clément Mouhot & Cédric Villani

p. 230: Tigrii lui Frisch

Fenomenul Tygre pentru ecuațiile lui Burgers și Euler trunchiate (1h) de Uriel Frisch

Arătăm că soluțiile ecuațiilor hidrodinamice incompresibile, după suprimarea tuturor modurilor Fourier spațiale cu frecvențe mai mari decât un prag k_g , prezintă proprietăți neașteptate. Studiul este întreprins atât pentru ecuația Burgers unu-dimensională cât și pentru ecuația lui Euler incompresibilă doi-dimensională. La un k_g mare, pentru condiții inițiale netede, primul simptom de trunchiere, o oscilație localizată cu lungime de undă scurtă, pe care o numim „tigră”, e provocat de o interacție rezonantă între mișcarea particulelor fluide și undele de trunchiere generate de caracteristicile la scară mică (șocuri, straturi limită cu gradienti de vorticitate puternici etc.). Acești tigri apar atunci când singularitățile din planul complex se apropie de dreapta reală la mai puțin de o lungime de undă Galerkin $\lambda_g = 2\pi/k_g$ și, în mod tipic, apar departe de structurile la scară mică preexistente în pozițiile unde vitezele se potrivesc cu cele ale respectivelor structuri. Tigrii sunt slabi și, la început, puternic localizați – în cazul Burgers la timpul apariției primului șoc, amplitudinile și lărgimile lor sunt proporționale cu $k_g^{-2/3}$ și respectiv $k_g^{-1/3}$ – dar cresc și, în final, invadează întregul flux. Sunt așadar primele manifestări ale termalizării prezise de T.D. Lee în 1952. Brusca anomalie disipativă – prezența unei disipări finite în limita vâscozității care dispare după un timp finit – binecunoscută pentru ecuația Burgers și, uneori, conjecturată pentru ecuația lui Euler 3D, are un corespondent în cazul trunchiat: capacitatea tigrilor de a stoca o cantitate finită de energie în limita $k_g \rightarrow \infty$. Aceasta duce la constrângeri Reynolds care acționează la scări mai mari decât lungimea de undă Galerkin, și astfel împiedică fluxul să convergă la soluția limită nevâscoasă. Există indicii potrivit cărora ar fi posibil să eliminăm tigrii, iar astfel să regăsim comportarea corectă în limita nevâscoasă.

p. 232: „Tigrul“ lui William Blake

Chiar dacă acest poem celebru e, în mod esențial, intraducibil, se găsesc cu ușurință numeroase încercări de traducere în franceză, pe hârtie sau în formă electronică; nici una nu mi s-a părut satisfăcătoare, și nu pot decât să încurajez cititorul să încerce să aprecieze versiunea originală. Sunt disponibile și numeroase exegeze, precum și mai multe variante care diferă de o manieră subtilă, diferențe datorate ezitărilor autorului și editorilor săi. Am redat aici textul original și (așa cum Blake o făcuse deja într-unul dintre manuscrise) am suprimat punctuația – care suferă ea însăși importante variații de la o ediție la alta:*

Tigru, Tigru, arzând grozav
În codrul nopții suav,
Ce mâini, ce ochi din vecie
Îți scriu cumplita simetrie?

Din ce bolți sau joase văi
Vin flăcări în ochii tăi?
Ce aripi cutează locul
Și ce mâini s-atingă focul?

Cine, cum știu-nnoda
Fibrele-n inima ta?
Iar când a-nceput a bate
Ce brațe, ce glezne-ncordate?

Ce ciocan, ce lanț ți-a scos
Creierul din jarul gros?

* În română, iată o versiune a lui Șt. Augustin Doinaș (în *Atlas de sunete fundamentale*, Ed. Dacia, Cluj-Napoca, 1988)

Ce pumn pe ce nicovală
Izbind teroarea mortală?

Când aștrii-și frâng lancea-n zbor
Spălând ceru-n plânsul lor,
Își atinge-n tine țelul,
Zâmbind, cel ce-a făcut Mielul?

Tigru, Tigru, arzând grozav
În codrul nopții suav
Ce mâini, ce ochi de vecie
Îți scriu cumplita simetrie?

Anexă
Versuri originale

p. 137: Marinarul și roza.

Le marin et la rose (Huard)

*Y'avait un 'fois une rose
Une rose et un marin
L'marin était à Formose
La rose était à Dublin*

*Jamais au monde ils n'se virent
Ils étaient beaucoup trop loin
Lui quittait pas son navire
Ell' quittait pas son jardin*

*Au-d'ssus de la rose sage
Des oiseaux passaient tout l'temps
Et puis aussi des nuages
Des soleils et des printemps*

*Au-d'ssus du marin volage
Des rêv's étaient tout pareils
Aux printemps et aux nuages
Aux oiseaux et aux soleils*

*L'marin périt en septembre
Et la ros', le même jour
Vient se flétrir dans la chambre
D'une fille en mal d'amour*

*Personn' jamais ne suppose
Qu'il y ait le moindre lien
Entre l'marin de la Formose
Et la rose de Dublin*

*Et seul un doigt sur la bouche
Un ang' beau comme un éclair
Jett' quand le soleil se couche
Des pétales sur la mer.*

p. 160: Zi de sărbătoare.

Jour de Fête (Catherine Ribeiro)

*Le grand jour était arrivé
De partout la fête éclatait
Derrière chaque fenêtre luisaient
Guirlandes bougies et boules de gomme
Ce soir-là chacun se devait
De s'éclater au tiroir-caisse
Des magasins pochettes surprises
Jour du formidable gâchis -*

*Paris scintillait de lumières
Mais tout mon être était absent
J'avais croisé un satellite
Bien mal placé sur mon orbite
Qu'est-ce que j'foutais sur les trottoirs
Dans les boutiques endimanchées
À chercher l'objet pseudo rare
À chercher le dernier cadeau -*

*J'aurais voulu être ailleurs
Cet ailleurs n'avait pas de lieu
Je n'avais plus ni faim ni soif
J'avais envie de faire l'amour
N'importe où - n'importe comment
Pourvu que ce soit de l'amour
Même de l'amour au ras du sol
Pourvu que passe l'émotion -*

*Le téléphone n'a pas sonné
Sûrement à cause des PTT
Le champagne n'avait aucun goût
Je veillais pour être debout
Le temps passait à fendre l'âme
Et la pluie frappait les carreaux
Il n'y a rien de plus dérisoire
Qu'un corps chaud dans un lit désert -*

*Ce soir-là combien de malades
S'évertuèrent à faire l'amour
Dans des draps d'aube macabre
L'haleine empuantie d'alcool
C'était le Grand Jour - Jour de Paix
Au fin fond de mes Amériques
Je rêvais de mon satellite
Bien mal placé sur mon orbite -*

p. 160: Turnul din Babel.

La Tour de Babel (extrait), Guy Béart

*Pour un mot qui clame
Un mot de travers
Il y aura des flammes
Dans tout l'univers
Les bouches sont grandes
Pour les beaux discours
Mais les peaux se vendent
Les peaux de tambours*

*Un jour nos langages
Parleront de fleurs
Et du mariage
Des quatre couleurs
Sauras-tu comprendre
Qu'ils parlent d'amour
Moi je vais t'attendre
Au pied de la Tour*

*En attendant, Caïn chasse toujours Abel
Mais j'ai construit de mes mains la Tour de Babel*

În colecția **Știință** au mai apărut

IAN STEWART

DE CE FRUMUSEȚEA ESTE ADEVĂRUL

O istorie a simetriei

Totul a început, pe vremea babilonienilor, cu o problemă care azi pare banală pentru orice elev: rezolvarea ecuației de gradul doi. Cum însă dezvoltarea matematicii urmează căi nebănuite, încercarea de a rezolva prin radicali ecuația de gradul cinci a condus în secolul XIX la apariția unei întregi noi ramuri care descrie simetria – teoria grupurilor. S-a dovedit apoi că abstracțiunile matematicienilor nu numai că sunt utile fizicienilor, dar că ele stau la baza înțelegerii naturii. Cu alte cuvinte, că structura cea mai profundă a universului nostru e simetrică.

Celebrul matematician englez Ian Stewart (autor al cărții *Numerele naturii*, apărută la Humanitas) spune povestea descoperirii simetriei și a legăturii adânci între matematică și fizică. Personajele lui nu sunt savanți imateriali, ci oameni în carne și oase, care suferă drame, se luptă în duel sau cad în patima beției ori a jocurilor de noroc. În *De ce frumusețea este adevărul* ideile cele mai abstracte se întâlnesc cu viața cea mai tumultuoasă, iar rezultatul e un pasionant roman al matematicii.

IAN STEWART

ÎMBLÂNZIREA INFINITULUI. POVESTEA MATEMATICII

Începând cu primele simboluri folosite în preistorie pentru numere și încheind cu problemele subtile ale Epocii de Aur a Matematicii pe care o trăim azi, Ian Stewart spune povestea celei mai abstracte discipline – care, la fiecare din momentele ei de răscruce, se dovedește a avea cea mai profundă influență asupra concretului vieții noastre. Cifra zero, numerele imaginare sau geometriile care contrazic intuiția comună ne sunt indispensabile dacă vrem să înțelegem lumea în care trăim. Și apoi e frumusețea matematicii, unitatea care se află în spatele unor forme aparent diferite, aventura pură trăită de personajele care populează Îmblânzirea infinitului.

MARIO LIVIO
ESTE DUMNEZEU MATEMATICIAN?

Începând cu Antichitatea greacă, cunoașterea lumii s-a legat intim de numere și de forme geometrice. Mai mult, cu timpul, gradul de dezvoltare a unei discipline științifice a fost echivalat cu nivelul ei de matematizare, iar un criteriu esențial pentru valabilitatea unei teorii a devenit frumusețea ei matematică. Cu alte cuvinte, în chip inevitabil, matematica se află în spatele tuturor fenomenelor pe care ne străduim să le înțelegem. Dar cum se explică această uimitoare eficacitate a ei? De ce lumea este, în esență, de natură matematică?

Acestea sunt problemele pe care le atacă astrofizicianul Mario Livio, unul dintre autorii consacrați ai literaturii științifice adresate publicului larg. Este Dumnezeu matematician? ne poartă prin istorie, matematică, știință, logică și filozofie pentru a descrie tabloul celei mai tulburătoare întrebări pe care și-o poate pune cercetătorul naturii.

SIMON SINGH
MAREA TEOREMĂ A LUI FERMAT

„Am descoperit o demonstrație cu adevărat minunată, dar nu am aici destul spațiu pentru a o scrie.“ Acestea sunt cuvintele notate de ilustrul matematician Pierre de Fermat pe marginea unei pagini din ediția Aritmeticii lui Diofant, în 1637. Vreme de 358 de ani, marii matematicieni ai lumii au încercat în zadar să găsească demonstrația teoremei lui Fermat, devenită simbol al misterului matematic. Eforturile lor au condus la deschiderea unor noi domenii de cercetare și au făcut, în același timp, ca perspectiva dezlegării enigmei să devină un fel de Fata Morgana. În 1995, englezul Andrew Wiles reușește ceea ce părea până atunci imposibil. Demonstrația lui nu numai că rezolvă cea mai celebră problemă matematică, dar stabilește legături adânci între domenii aparent îndepărtate ale matematicii.

Cartea lui Simon Singh e povestea minunată a căutării demonstrației teoremei lui Fermat, precum și povestea dezvoltării matematicii înseși, spusă pe înțelesul tuturor.

RICHARD P. FEYNMAN

VĂ ȚINEȚI DE GLUME, DOMNULE FEYNMAN!

Aventurile unui personaj ciudat

Cu excepția lui Einstein, în jurul nici unui om de știință nu s-a creat o legendă comparabilă cu cea a lui Richard Feynman. *Vă țineți de glume, domnule Feynman!* istorisește aventuri savuroase – de la spargerea seifurilor cu documentele secrete ale proiectului bombei atomice și de la farsele jucate colegilor până la stratagemele de cucerire a femeilor în baruri – în care întâlnim neastâmpărul, spiritul ludic și plăcerea de a găsi soluții neconvenționale care l-au făcut pe Feynman să schimbe fața fizicii secolului XX. Rebel, profund original și independent atât în plan intelectual, cât și în plan social, plin de umor, de fantezie și de viață, preocupat până la obsesie să lămurească toate misterele care-i ieșeau în cale, absolut onest, mânat de o curiozitate fără limite, gata să se lanseze în orice aventură – așa ni se înfățișează Feynman în amintirile sale.

LAWRENCE M. KRAUSS

OMUL CUANTIC

Richard Feynman a fost figura cea mai pregnantă a fizicii din a doua jumătate a secolului XX; a devenit un simbol al științei, așa cum fusese Einstein la începutul secolului. Celebritatea lui Feynman se explică prin contribuțiile sale fundamentale la dezvoltarea fizicii teoretice, prin capacitatea de a sesiza esențialul în probleme ținând de un spectru formidabil de larg – informatică, inginerie, biologie –, prin talentul de a explica simplu și neconvențional lucruri care pentru alții rămân de nepătruns și, nu în ultimul rând, prin forța magnetică a personalității sale.

Urmărind biografia științifică a lui Feynman, *Omul cuantic* spune povestea fizicii din a doua jumătate a secolului XX, de la crearea electrodinamicii cuantice până la intrarea în scenă a cuarcilor. În cartea lui Lawrence Krauss, aventurile cercetărilor lui Feynman se împletesc cu aventurile vieții sale nonconformiste, dominată de refuzul tranșant de a urma căările bătătorite.

LEONARD SUSSKIND

PEISAJUL COSMIC

Teoria corzilor și iluzia unui plan inteligent

Pe măsură ce înțelegem tot mai bine universul nostru, suntem confrunțați cu o întrebare tulburătoare: Cum se face că legile naturii sunt atât de fin reglate încât să permită existența stelelor, a Pământului și, în ultimă instanță, a noastră? Pe de altă parte, teoria corzilor – care se presupune a fi explicația ultimă a fizicii – nu conduce la o singură soluție pentru legile naturii, ci la o bogăție inimaginabilă de variante. De ce atâtea posibilități, când primul gând al filozofilor și oamenilor de știință este că existența noastră e unic determinată?

Leonard Susskind răspunde la cele două întrebări printr-o remarcabilă schimbare de paradigmă, una dintre cele mai profunde din întreaga istorie a științei: universul nostru nu e decât unul între nenumărate altele, cuprinse într-un megavers în care toate posibilitățile se realizează efectiv.

Leonard Susskind este unul dintre cei mai mari fizicieni ai zilelor noastre. El se numără printre fondatorii teoriei corzilor, iar cu câțiva ani în urmă l-a învins pe Stephen Hawking într-o celebră dispută privind găurile negre.

STEPHEN HAWKING, LEONARD MLODINOW

MARELE PLAN

În *Marele plan*, Stephen Hawking și Leonard Mlodinow își confruntă cititorii cu unele dintre cele mai profunde și grave întrebări pe care și le pot pune oamenii: Când și cum a apărut universul? De ce ne aflăm aici? De ce există ceva mai degrabă decât nimic? Care este natura realității? De ce legile naturii sunt atât de fin reglate încât să permită apariția unor ființe ca noi? Este oare aparentul „mare plan“ al universului nostru dovada existenței unui creator, sau poate știința oferi o altă explicație?

Răspunsurile date aici de Stephen Hawking, unul dintre cei mai mari savanți ai timpurilor noastre, și de Leonard Mlodinow, fizician și scenarist al serialului *Star Trek*, pornesc de la ideea că universul nu are doar o singură istorie, ci toate istoriile sale posibile există simultan – idee care ne schimbă radical felul în care suntem obișnuiți să privim lumea.